ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»

24 Φεβρουαρίου 2012

ΘΕΜΑ 1°

(A) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{5}$ και $\varepsilon_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z-4$.

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και να βρείτε το σημείο τομής τους.

Μονάδες 0,7

(ii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π που περιέχει το σημείο $\mathrm{M}(2,2,6)$ και την ε_2.

Μονάδες 0,8

(B) Να αναγνωρίσετε τις επιφάνειες

(i) $y^2 + z^2 = a^2, a > 0,$ (ii) $x^2 + y^2 = (z-3)^2$.

και να κάνετε μία πρόχειρη σχεδίασή τους.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2°

(i) Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma)$ να έχει λύση:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= \alpha \\ x - 2y + z &= \beta \\ x - 9y + 5z &= \gamma \end{aligned}$$

Δώστε θεωρητική τεκμηρίωση για την απάντησή σας.

(ii) Είναι ο πίνακας του συστήματος αντιστρέψιμος? Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(iii) Να βρεθεί το σύνολο λύσεων Λ_0 του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος Σ_0.

(iv) Χρησιμοποιώντας το (iii) δώστε το σύνολο λύσεων Λ του παραπάνω γραμμικού συστήματος Σ για $(\alpha, \beta, \gamma) = (2,1,1)$.

(v) Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πυρήνας να είναι το σύνολο Λ_0.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3°

A) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + x_3 + x_4,\ 2x_1 - x_3).$$

(α) Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$.

(β) Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ και τη βάση $\{\varepsilon_1 = (1,2,3),\ \varepsilon_2 = (0,1,2),\ \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(γ) Να βρείτε μια βάση του πυρήνα $\ker f$ και μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$.

Μονάδες 1,5

(B) Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους X, Y πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν η γραμμική απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ είναι 1-1 και επί και $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι μία βάση του X, να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\}$ είναι βάση του Y.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 4°

A) Έστω V γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από σώμα K, έστω $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα και έστω $\vec{v} \in V$.

Δείξτε ότι $\vec{v} \notin [\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n]$ αν και μόνον αν τα $\vec{v},\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μονάδες 1

B) Έστω $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-3y-z=0\}$.

(i) Βρείτε υπόχωρο V_2 του $\mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ και επαληθεύστε τον τύπο των διαστάσεων.

(ii) Βρείτε μία βάση του $\mathbb{R}^3$ με στοιχεία από τους χώρους V_1, V_2.

(iii) Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που να έχει εικόνα τον V_1.

Μονάδες 1,5

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες **Καλή επιτυχία**