ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Θέμα 1 (2 βαθμοί): Δίνεται το μη-γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών στο [0,0.1]:

$$y' = \frac{1}{10}y^3 - e^{-2x} - \frac{1}{10}(e^{-2x} + x)^3 + 1$$
$$y(0) = 1$$

(α) Να ορίσετε την πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδο του Euler στο διάστημα [0,0.1] με ομοιόμορφο βήμα και να υπολογίσετε μια προσέγγιση y_1 του y(0.1) εκτελώντας 1 επανάληψη. Για την λύση της μη-γραμμικής εξίσωσης να χρησιμοποιήσετε 2 επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson. (*Υπενθύμιση:* $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$, x_0 γνωστό.)

(β) Είναι η πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδος του Euler, Α-ευσταθής; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Θέμα 2 (3 βαθμοί): (α) Η γενική κ-βηματική μέθοδος έχει τη μορφή

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \quad \text{όπου } a_j, \beta_j \in \mathbb{R}, a_k \neq 0, a_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 .$$

Να ορίσετε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα 1ου και 2ου βαθμού και με την βοήθεια τους να δώσετε τον ορισμό της μηδενικής ευστάθειας και της Α-ευστάθειας.

(β) Να μελετήσετε την ακόλουθη κ-βηματική μεθοδολογία ως προς την μηδενική ευστάθεια, σύγκλιση, και τάξη σύγκλισης.

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 2h(2f_{n+1} + f_n).$$

(γ) Είναι η μέθοδος Α-ευσταθής; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$ και υποθέτουμε πως η συνάρτηση f είναι ομαλή και οι αρχικές συνθήκες κατάλληλα επιλεγμένες.

Υπενθύμιση: $C_p = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j$

Θέμα 3 (3 βαθμοί):

(α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο προβλήμα συνοριακών τιμών:

$$-\frac{d}{dx}((x+2)\frac{du}{dx}) + u(x) = f(x)$$
$$u(0) = 2, \quad u(1) = e^{-1} + 2$$

όπου η συνάρτηση f(x) είναι ομαλή.

(β) Να ορίσετε την διακριτή λύση Galerkin, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχειών (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη).

(γ) Δίνεται ο ακόλουθος τύπος σφάλματος για το πρόβλημα των ερωτημάτων (α)-(β):

$$\| u-u^h \|_A \le \frac{h}{\pi}\left\{ \max_{a\le x\le b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a\le x\le b} r(x) \right\}^{1/2} \| u''(x) \|_{L^2(a,b)}$$

όπου $\| f \|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b | f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}$.

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\| u-u^h \|_A \le 10^{-2}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται $u(x) = e^{-x^2} + 2$.

Θέμα 4 (2 βαθμοί):

(α) Να ορίσετε την κεντρική διαφορά δεύτερης τάξης $\delta^2 y(x)$ στο διάστημα $[x-h, x+h]$ για συνάρτηση $y \in C^{(4)}[x-h, x+h]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $\xi \in (x-h, x+h)$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\delta^2 y(x)}{h^2} = y''(x) + \frac{1}{12} h^2 y^{(4)}(\xi).$$

(β) Έστω $r(x), f(x)$, συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$ και $r(x) \ge 0$ για κάθε $a \le x \le b$. Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u''(x) + r(x)u(x) &= f(x), \qquad a < x < b \\ u(a) &= A, \qquad u(b) = B. \end{aligned}$$

να οριστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης με ομοιόμορφη διαμέριση.

Διάρκεια εξέτασης: 2&1/2 ώρες.

<u>Καλή επιτυχία.</u>