Κανονική Εξέταση στο μάθημα Κβαντομηχανική II
Μάρτης 2014
Διάρκεια: 2.5 ώρες
Κλειστά βιβλία, σημειώσεις και κινητά
Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Θέμα 1 (α) Δείξτε ότι η χρονική μεταβολή της αναμενόμενης τιμής $<\hat{A}>$ ενός τελεστή $\hat{A}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d<\hat{A}>}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [\hat{A}, \hat{H}] > + < \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} > .$$

(β) Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q, που κινείται στον άξονα των x, δέχεται δύναμη $-m\omega^2 x$, όταν βρίσκεται στη θέση x, και επί πλέον αλληλεπιδρά με ένα χρονικά σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}$. Το ω είναι μια θετική σταθερά. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x.$$

Υπολογίστε τις ποσότητες

$$\frac{d<\hat{x}>}{dt}, \frac{d<\hat{p}>}{dt}.$$

(γ) Συνδυάστε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β) για να βρείτε την ποσότητα $<\hat{x}>$ συναρτήσει του χρόνου, με την προϋπόθεση ότι, για $t = 0$, τα $<\hat{x}>$ και $<\hat{p}>$ μηδενίζονται.

Θέμα 2 Θεωρήστε ένα σωματίδιο με μάζα m που βρίσκεται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $\left(\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\right)$, όπου το ω είναι μια θετική σταθερά. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η κατάσταση του σωματιδίου περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$|\psi_{t=0}>= \cos\alpha|n> + \sin\alpha e^{i\beta}|n+1>,$$

όπου τα α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και έχουμε συμβολίσει με $|n>$ και $|n+1>$ τις ιδιοκαταστάσεις ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή που αντιστοιχούν στις ενέργειες E_n και E_{n+1}, όπου $E_m = \hbar\omega\left(m + \frac{1}{2}\right)$. (α) Να προσδιορίσετε την κυματοσυνάρτηση $|\psi_t>$, για $t > 0$. (β)Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή $< x_t > \equiv < \psi_t|\hat{x}|\psi_t >$ ως συνάρτηση του χρόνου t.

Θέμα 3 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\psi = cre^{-\frac{r}{2a}}\cos\theta$ μπορεί να θεωρηθεί κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός σωματιδίου με μάζα m, το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(r) = \frac{\gamma}{r}$ και καλά ορισμένη στροφορμή. Οι τυχόν βαθμοί ελευθερίας του σπιν αγνοούνται τελείως. Να υπολογίσετε:

(α) Τον κβαντικό αριθμό l της τροχιακής στροφορμής του συστήματος.

(β) Την ενέργεια E του συστήματος και τη σταθερά γ.

Θέμα 4 Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m κινούμενο σε δισδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι που εκτείνεται μεταξύ των θέσεων $x = 0$, $x = L$ και $y = 0$, $y = L$. Να βρείτε τις δύο στάθμες χαμηλότερης ενέργειας και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές ενέργειας E_0 και E_1. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το δυναμικό μέσα στο πηγάδι αποκτά μιά διαταραχή της μορφής $V = \lambda xy$. (α) Να υπολογίσετε τη διόρθωση σε πρώτη τάξη ως προς λ στην ενέργεια E_0 της θεμελιώδους στάθμης του αδιατάρακτου συστήματος. (β) Να γράψετε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που δίνει τις διορθώσεις στην ενέργεια E_1 της πρώτης διεγερμένης στάθμης του αδιατάρακτου συστήματος.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \ [\hat{A}, \hat{B}^2] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$$

$$\hat{a}|n >= \sqrt{n}|n >, \ \hat{a}^\dagger|n >= \sqrt{n+1}|n+1 >$$

$|n-1>$

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \left(\sin^2\frac{\pi x}{L}\sin^2\frac{\pi y}{L}\right)(xy) = \frac{L^4}{16},$$

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \left(\sin^2\frac{\pi x}{L}\sin^2\frac{2\pi y}{L}\right)(xy) = \frac{L^4}{16},$$

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \left(\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}\right)(xy) = \frac{64L^4}{81\pi^4}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2\hbar^2}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \ \hat{H}_0|q >= E_q^{(0)}|q >, \ E_q \approx E_q^{(0)} + E_q^{(1)}$$