ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΟΜΑΔΑ: Α

8 Μαρτίου, 2012

Θέμα 1. (α′) Έστω A, B μη κενά σύνολα πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x \leq y$, για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να δείξετε ότι $\inf B \geq x$, για κάθε $x \in A$. (1 μον.)

(β′) Έστω (α_ν) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \rho < 1\,.$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Αν $\inf B < x$, για κάποιο $x \in A$, τότε επιλέγοντας $\varepsilon = x - \inf B > 0$, από το χαρακτηρισμό του infimum, θα υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε

$$y < \inf B + \varepsilon = x$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\inf B \geq x$, για κάθε $x \in A$.

(β′) Από την υπόθεση, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < \rho + \varepsilon = \lambda < 1 \ \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Επομένως

$$0 \leq |\alpha_\nu| < \lambda^\nu \ \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Αφού $0 < \lambda < 1$, είναι $\lim_{\nu\to\infty} \lambda^\nu = 0$ και κατά συνέπεια $\lim_{\nu\to\infty} |\alpha_\nu| = 0$. Το τελευταίο όμως συνεπάγεται ότι $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$

■

Θέμα 2. (α′) Έστω (α_ν) και (β_ν) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = +\infty\,.$$

Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ αποκλίνει, τότε αποκλίνει και η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. (1 μον.)

(β′) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά, κέντρου 0, τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}\,, \qquad |x| < 1\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Έστω $M > 0$. Τότε από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} > M \ \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Επομένως,

$$\alpha_\nu > M\beta_\nu \ \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$ θα αποκλίνει.

(β′) Έχουμε, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά και το θεώρημα για την παραγώγιση όρο προς όρο δυναμοσειρών, ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^3} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\left(-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \cdots\right)' \\
&= 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1\,.
\end{aligned}$$

■

Θέμα 3. Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$.

(α′) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_n)| > n\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες αποδείξτε ότι η παραπάνω υπόθεση οδηγεί σε άτοπο. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$. (1 μον.)

(β′) Έστω $f(x_0) > 0$, όπου $x_0 \in (a,b)$. Αποδείξτε οτι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b] \text{ να ισχύει } \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,. \tag{1}$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

Αν υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, χρησιμοποιώντας την (1) αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Να συμπεράνετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Η ακολουθία (x_n) σημείων του $[a,b]$ είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κατά συνέπεια το $x \in [a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}\right) = f\left(x\right)\,.$$

Δηλαδή η ακολουθία $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ συγκλίνει και κατά συνέπεια θα είναι φραγμένη. Όμως από την υπόθεση είναι

$$|f(x_{k_n})| > k_n \geq n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \left|f\left(x_{k_n}\right)\right| = \infty$, δηλαδή η ακολουθία $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ δεν είναι φραγμένη. Άτοπο. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

(β′) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, για $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta_1$, δηλαδή $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,.$$

Αν πάρουμε το $\delta < \delta_1$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$, τότε

$$\text{για κάθε } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b] \text{ θα είναι } \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Αν υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \delta f(x_0) > 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Επομένως $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, θα είναι $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ και $f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

■

Θέμα 4. (α′) Διατυπώστε το θεώρημα Taylor. Στον τύπο Taylor δείξτε ποιο είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n ($n \in \mathbb{N}$) και ποιο το υπόλοιπο. Δώστε και τις δύο μορφές του υπολοίπου. Ποιο θεώρημα χρησιμοποιείται για την απόδειξη του τύπου Taylor; (1 μον.)

(β′) Εφαρμόστε τον τύπο Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$ και αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\,. \qquad (2)$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α′) **Θεώρημα Taylor**: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ της οποίας οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και η $f^{(n+1)}$ υπάρχει στο (a,b). Αν $x_0 \in [a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,, \qquad \text{(τύπος Taylor)}$$

όπου

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ είναι } \textbf{το πολυώνυμο Taylor βαθμού } n$$

και $R_n(x)$ είναι το **υπόλοιπο** με

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{(Lagrange)}$$

ή

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0)\,. \qquad \text{(Cauchy)}$$

Για την απόδειξη του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Lagrange χρησιμοποιείται το "γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής ". Για την απόδειξη του ίδιου τύπου με το υπόλοιπο κατά Cauchy χρησιμοποιείται το κλασικό θεώρημα μέσης τιμής.

(β′) Θα εφαρμόσουμε τον τύπο Maclaurin(τύπος Taylor με $x_0 = 0$)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\,,$$

όπου ξ μεταξύ 0 και x. Παρατηρούμε ότι η n-οστή παράγωγος της $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, είναι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,.$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad \text{και} \quad \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = (-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\,.$$

Επομένως, αν $x > 0$

$$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}}_{R_n(x)}\,, \tag{3}$$

για κάποιο ξ με $0 < \xi < x$.

(i) Αν $n = 2k$ είναι άρτιος, τότε $R_{2k}(x) > 0$ και από την (3) προκύπτει η αριστερή ανισότητα της (2).

(ii) Αν $n = 2k+1$ είναι περιττός, τότε $R_{2k+1}(x) < 0$ και από την (3) προκύπτει η δεξιά ανισότητα της (2).

■

Θέμα 5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η λύση της εξίσωσης

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24}$$

είναι $x = 2\sqrt{3} - 1$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{(t+1)^2+2^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan 1 \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8}\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \tan\frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{3} - 1\,.
\end{aligned}$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες