

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Θέματα Εξέτασης Μαρτίου 2012)

ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

**A.1:** Τι είναι Στατιστικό Μείγμα κβαντικών καταστάσεων, πως σχετίζεται αυτό με τον πιθανοτικό χαρακτήρα που προκύπτει από τα αξιώματα της κβαντομηχανικής τα οποία να υπενθυμίσετε τηλεγραφικά.

**A.2:** Στην περίπτωση καθαρής κβαντικής κατάστασης  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Δείξτε ότι για οποιαδήποτε φυσική ποσότητα  $\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\}$ .

**A.3:** Σύστημα αποτελείται από δύο ανεξάρτητα σωματίδια, A και B. Το καθένα έχει δύο δυνατές ενεργειακές καταστάσεις  $E_1^{A(B)}$  και  $E_2^{A(B)}$  με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις  $|u_1^{A(B)}\rangle$  και  $|u_2^{A(B)}\rangle$ . Σε καθένα από τους χώρους Hilbert,  $\mathcal{E}_A$  και  $\mathcal{E}_B$  αντίστοιχα ορίζεται η ορθοκανονική βάση  $\{|\psi_{\pm}^{A(B)}\rangle\}$  από τη σχέση

$$|\psi_{\pm}^{A(B)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |u_1^{A(B)}\rangle \pm |u_2^{A(B)}\rangle \right]$$

Το σύστημα είναι σε επαφή με ένα δοχείο θερμότητας

**α)** Στη βάση  $\{|\psi_{\pm}^A\rangle \otimes |\psi_{\pm}^B\rangle\}$  να δώσετε τη μορφή πίνακα της ολικής χαμιλτονιανής  $H = H_A + H_B$ .

**β)** Να γράψετε τον τελεστή πυκνότητας του χώρου  $\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$  στη βάση στην οποία η ολική χαμιλτονιανή είναι διαγώνια.

**A.4:** Δείξτε ότι στις κατανομές ισορροπίας ισχύει για την εντροπία

$$S = k \ln(Z) - k \sum_i \lambda_i \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \lambda_i}$$

**A.5:** Θεωρούμε ταυτόσημα σωματίδια τα οποία μπορεί να βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις ενεργειακές τους ιδιοκαταστάσεις  $\{|u_i\rangle\}$ .

**α)** Υπολογίστε τα εσωτερικά γινόμενα:

1)  $\langle u_3, u_2, u_1, u_6, u_4, u_5 | u_3, u_2, u_1, u_4, u_6, u_5 \rangle$

2)  $\langle u_3, u_2, u_1, u_6, u_4, u_5 | u_5, u_4, u_6, u_1, u_2, u_3 \rangle$

3)  $\langle u_3, u_2, u_1, u_6, u_4, u_5 | u_3, u_2, u_1, u_6, u_4, u_5 \rangle$

**β)** Γράψτε όλα τα κets που εμπλέκονται στα παραπάνω γινόμενα στην αναπαράσταση αριθμού κατάληψης (αναπαράσταση Fock) και επαναλάβετε τα εσωτερικά γινόμενα με τα διανύσματα που προέκυψαν. Σχολιάστε.

**A.5:** Θεωρούμε την υπεραγωγίμη μετάβαση.

**α)** Ποιά είναι η παράμετρος τάξης και πώς αναπαριστά τη συμμετρία που σπάει κατά τη μετάβαση αυτή;

**β)** Στο ανάπτυγμα της ελεύθερης ενέργειας ως προς την παράμετρο τάξης θα υπάρχουν περιττές δυνάμεις;

### Μέρος Β:

**B.1:** Να βρείτε τις συναρτήσεις επιμερισμού και τους τελεστές πυκνότητας για την παγίδα σε επαφή με ένα δοχείο θερμότητας και ένα δοχείο σωματιδίων της οποίας οι μη εκφυλισμένες προσπελάσιμες καταστάσεις είναι δύο: οι  $E = \varepsilon$  και  $E = 2\varepsilon$ . Μπορεί να παγιδεύσει το πολύ

- α.) Δύο διακριτά σωματίδια.
- β.) Δύο ταυτόσημα φερμιόνια χωρίς σπίν.
- γ.) Τρία ταυτόσημα μποζόνια.

**B.2:** Θεωρούμε ένα τρισδιάστατο ιστροπικό αρμονικό ταλαντωτή που σε πρώτη προσέγγιση μοντελοποιεί την ασθενή αλληλεπίδραση ενός ατόμου του κρυσταλλικού πλέγματος με τα υπόλοιπα άτομα του πλέγματος σε ένα στερεό.

- α) Να υπολογίσετε τη Συνάρτηση επιμερισμού  $Z$
- β) Να υπολογίσετε την εσωτερική ενέργεια  $U$ , πως σχετίζεται με αυτή του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ;
- γ) Να υπολογίσετε τη θερμοχωρητικότητα  $C = dU/dT$  του πλέγματος υποθέτοντας σε πρώτη προσέγγιση ότι αποτελείται από  $N$  ανεξάρτητους τρισδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές όπως οι παραπάνω (προσέγγιση *Einstein*). Παίρνοντας τα όρια  $T \rightarrow 0$  και  $T \rightarrow \infty$  δώστε ένα διάγραμμα  $C(T)$  και σχολιάστε.

### Μέρος Γ:

Θεωρούμε ζεύγη ακινητοποιημένων ηλεκτρονίων τα οποία θέτουμε υπο την επήρεια ενός μαγνητικού πεδίου  $B$ . Τα ηλεκτρόνια του ζεύγους είναι διακριτά και αλληλεπιδρούν μόνον με μια ενέργεια ανταλλαγής των σπίν  $J$ . Μπορούμε να δείξουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας ενός τέτοιου ζεύγους είναι μια *singlet*  $|S\rangle$  και τρεις *triplet*:  $|T_-\rangle$ ,  $|T_0\rangle$  και  $|T_+\rangle$  με αντίστοιχες ενέργειες:  $E_S = -3J/4$ ,  $E_- = J/4 - 2\mu_B B$ ,  $E_0 = J/4$  και  $E_+ = J/4 + 2\mu_B B$ .

**Γ.1:** Να βρείτε τον τελεστή πυκνότητας και τη συνάρτηση επιμερισμού ενός τέτοιου ζεύγους. Να δώσετε τις ίδιες ποσότητες όταν  $J = 0$ . Τι παρατηρείτε ;

**Γ.2:** Να βρείτε την εσωτερική ενέργεια  $U_1$  και την εντροπία  $S_1$  ενός ζεύγους.

**Γ.3:** Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού, την εσωτερική ενέργεια και την εντροπία ενός συστήματος που αποτελείται από  $N$  τέτοια ζεύγη αρκετά απομακρυσμένα ώστε να μην υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσά τους.

**Γ.4:** Να βρείτε τη μέση μαγνήτιση για το σύστημα της Γ.3 συναρτήσει του πεδίου και της θερμοκρασίας.

**Γ.5:** Θεωρούμε ότι τα ζεύγη έρχονται αρκετά κοντά ώστε να υπάρχει μια ελαφρά αλληλεπίδραση ανάμεσά τους χωρίς να επηρεάζονται οι ίδιες με αποτέλεσμα να παρατηρείται μια σιδηρομαγνητική μετάβαση. Κάνοντας μια προσέγγιση μέσου πεδίου τύπου Ωεισς όπου  $B_{eff} \approx \Lambda M$  να δώσετε την εξίσωση αυτοσυνέπειας συναρτήσει της ισχύος ζεύξης  $\Lambda$ .