ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Θέματα Εξέτασης Μαρτίου 2014)

ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1: Εστω **Στατιστικό Μείγμα** N κβαντικών καταστάσεων $|\Psi_i\rangle$ με αντίστοιχη πιθανότητα P_i. Μπορούμε να θεωρήσουμε εδώ ότι $\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle = \delta_{i,j}$ (δεν είναι απαραίτητο).

α) Υπενθυμίστε τηλεγραφικά τα αξιώματα της κβαντομηχανικής τα οποία υπακούουν οι καθαρές κβαντικές καταστάσεις $|\Psi_i\rangle$.

β) Δείξτε ότι ορίζοντας τον τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho} = \sum_i P_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ η μέση τιμή μιας ποσότητας $\widehat{A}$ δίνεται από τη σχέση: $\langle\widehat{A}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$

Α.2: Δείξτε ότι για τα συστήματα σε ισορροπία ισχύει η σχέση $dS = k\sum_i \lambda_i d\langle\widehat{X}_i\rangle$. Από τη σχέση αυτή σχολιάστε το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών *Lagrange* καθώς και **την προσθετικότητά τους.**

Α.3: Για την υπεραγώγιμη μετάβαση, παράμετρος τάξεως μπορεί να ορισθεί μια κυμματοσυνάρτηση $\Psi = |\Psi|e^{-i\phi}$. Χωρίς την παρουσία πεδίων, η πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας μπορεί να υπακούει ένα ανάπτυγμα της μορφής

$$f_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Πώς η παραπάνω παράμετρος τάξης αναπαριστά τη συμμετρία που σπάει κατα τη μετάβαση αυτή ;

β) Γιατί στο ανάπτυγμα της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας ειπισέρχονται μόνο άρτιες δυνάμεις της απόλυτης τιμής της παραμέτρου τάξεως ; (ανεξάρτητα από την τάξη της μετάβασης).

γ) Θα είναι συνεχής η παράμετρος τάξης στο σημείο της μετάβασης ; Γιατί ;

δ) Εάν η παράμετρος τάξης ήταν ασυνεχής στο σημείο της μετάβασης, ποιά θα ηταν η μορφή του αναπττύγματος της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας ;

ε) Εξηγήστε ποιοτικά γιατί για να έχουμε συμβατική υπεραγωγιμότητα θα πρέπει η ενέργεια των φωνονίων να είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια *Fermi*. Πως σχετίζεται αυτό με τη συμμετρία που σπάει κατά τη μετάβαση αυτή.

Α.4: Μέτρηση της **ενέργειας** ενός σωματιδίου μπορεί να δώσει μόνον δύο δυνατές τιμές E_1 και E_2 με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|u_1\rangle$ και $|u_2\rangle$. **Μετά τη μέτρηση** της φυσικής ποσότητας που αντιστοιχεί σε τελεστή $\widehat{A}$ το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε μια από τις δύο καταστάσεις $|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|u_1\rangle \pm |u_2\rangle\Big]$.

α) Αν το σύστημα είναι σε **Στατιστικό Μείγμα** καταστάσεων έχοντας πιθανότητα $P_{|u_2\rangle} = 0.5$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|u_2\rangle$ και πιθανότητα $P_{|\psi_+\rangle} = 0.5$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_+\rangle$, να βρεθούν η **Εντροπία** του συστήματος και οι **μέσες τιμές** $\langle\widehat{H}\rangle$ και $\langle\widehat{A}\rangle$.

β) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από **δύο** όμοια διακριτά και **ανεξάρτητα** σωματίδια όπως τα παραπάνω σε επαφή με δοχείο θερμότητας. Να βρείτε τη μέση τιμή της συνολικής χαμιλτονιανής $\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ και της συνολικής ποσότητας $\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$.

Μέρος Β:

Παγίδα προσομοιώνεται από πηγάδι δυναμικού το οποίο έχει τη μορφή ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή **δύο διαστάσεων** χαρακτηριστικής συχνότητας ω. Μπορεί να παγιδεύσει σωματίδια υποθετικά χωρίς σπίν **μόνον εάν** η ενέργειά τους είναι $E \leq 2\hbar\omega$.

Β.1: Η παγίδα είναι σε επαφή με δοχείο θερμότητας. Να βρείτε τον τελεστή πυκνότητας και τη συνάρτηση επιμερισμού όταν η παγίδα **έχει παγιδεύσει**:

α) Δύο ταυτόσημα φερμιόνια

β) Δύο ταυτόσημα μποζόνια

γ) Δύο διακριτά σωματίδια

Β.2: Η παγίδα είναι σε επαφή με δοχείο θερμότητας και με δοχείο ταυτόσημων φερμιονίων (υποθετικά χωρίς σπίν) χημικού δυναμικού μ.

α) Βρείτε τον τελεστή πυκνότητας, τη συνάρτηση επιμερισμού και το μεγάλο δυναμικό Ω κάθε παγίδας και για N τέτοιες ανεξάρτητες παγίδες.

β) Βρείτε την εσωτερική ενέργεια U, το μέσο αριθμό των παγιδευμένων φερμιονίων $< N >$, το μέσο αριθμό των παγίδων που έχουν παγιδεύσει δύο φερμιόνια N_2 και την εντροπία S.

Μέρος Γ:

Θεωρούμε ότι όλες οι N παγίδες του **Μέρους Β** έχουν παγιδεύσει από ένα σωματίδιο με σπίν $1/2$ (δύο δυνατές τιμές του σπίν) και είναι σε επαφή με δοχείο θερμότητας.

Γ.1: Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού, την εσωτερική ενέργεια U την ελεύθερη ενέργεια F και την εντροπία S του συστήματος.

Γ.2: Ενα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B αλληλεπιδρά με το σπίν των ηλεκτρονίων δίνοντας μια διόρθωση στη χαμιλτονιανή $\hat{H}_Z = -\hat{m}B$. Οι ιδιοτιμές της $\hat{H}_Z$ είναι $\pm\mu_B B$. Παρουσία του εξωτερικού πεδίου:

α) Να βρείτε τον τελεστή πυκνότητας, τη συνάρτηση επιμερισμού, την εσωτερική ενέργεια και την εντροπία.

β) Να βρείτε τη μέση μαγνήτιση του συστήματος των N παγίδων.

Γ.3: Θεωρούμε ότι οι παγίδες έρχονται αρκετά κοντά ώστε να υπάρχει μια ελαφρά αλληλεπίδραση ανάμεσά τους χωρίς να επηρεάζονται οι ίδιες με αποτέλεσμα να παρατηρείται μια αυθόρμητη σιδηρομαγνητική μετάβαση.

α) Κάνοντας μια προσέγγιση **μέσου πεδίου** τύπου *Weiss* όπου $B_{eff} \approx \Lambda M$ να δώσετε την **εξίσωση αυτοσυνέπειας** συναρτήσει της ισχύος ζεύξης Λ και της θερμοκρασίας.

β) Αν αντί για σωματίδια με σπίν $1/2$ είχαμε ιόντα με μαγνητική ροπή J ποιά θα ήταν η αντίστοιχη εξίσωση αυτοσυνέπειας ·