ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Σύντομος Ελεγχος, Ιανουάριος 2014)
ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

1) Εστω **Στατιστικό Μείγμα** N κβαντικών καταστάσεων $|\Psi_i\rangle$ με αντίστοιχη πιθανότητα P_i. Μπορούμε να θεωρήσουμε εδώ ότι $\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle = \delta_{i,j}$ (δεν είναι απαραίτητο).
α) Υπενθυμίστε τηλεγραφικά τα αξιώματα της κβαντομηχανικής τα οποία υπακούουν οι καθαρές κβαντικές καταστάσεις $|\Psi_i\rangle$.
β) Δείξτε ότι ορίζοντας τον τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho} = \sum_i P_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ η μέση τιμή μιας ποσότητας $\widehat{A}$ δίνεται από τη σχέση: $\langle\widehat{A}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$

2) Για ένα σύστημα σε **ισορροπία** με στατιστική πληροφορία στις ποσότητες $\widehat{X}_i$ η γενική μορφή του τελεστή πυκνότητας γράφεται $\widehat{\rho} = Z^{-1}\exp(-\sum_i \lambda_i\widehat{X}_i)$ όπου $Z = Tr\{\exp(-\sum_i \lambda_i\widehat{X}_i)\}$.
α) Δείξτε ότι ισχύει η $\langle\widehat{X}_i\rangle = -\frac{\partial\ln(Z)}{\partial\lambda_i}$
β) Δείξτε ότι όταν τα $\widehat{X}_i$ και $\widehat{X}_j$ μετατίθενται ισχύει η $\langle\widehat{X}_i\widehat{X}_j\rangle - \langle\widehat{X}_i\rangle\langle\widehat{X}_j\rangle = \frac{\partial^2\ln(Z)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$.

3) Μέτρηση της **ενέργειας** ενός σωματιδίου μπορεί να δώσει μόνον δύο δυνατές τιμές E_1 και E_2 με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|u_1\rangle$ και $|u_2\rangle$. Τελεστής $\widehat{A}$ έχει στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της χαμιλτονιανής τη μορφή πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Μετά τη μέτρηση** της φυσικής ποσότητας που αντιστοιχεί στον τελεστή $\widehat{A}$ το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε μια από τις δύο καταστάσεις $|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|u_1\rangle \pm |u_2\rangle\Big]$
α) Εξετάζοντας τη δράση του τελεστή $\widehat{A}$ στις ιδιοκαταστάσεις της χαμιλτονιανής να βρείτε ποιές είναι οι δυνατές μετρήσιμες τιμές του τελεστή $\widehat{A}$.
β) Αν το σύστημα είναι στην **καθαρή** κατάσταση $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\sqrt{2}|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\Big]$. Υπολογίστε, τις **μέσες τιμές** $\langle\widehat{H}\rangle$ και $\langle\widehat{A}\rangle$.
γ) Αν το σύστημα είναι σε **Στατιστικό Μείγμα** καταστάσεων έχοντας πιθανότητα $P_{|\Phi\rangle} = 0.5$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|\Phi\rangle$ που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα και πιθανότητα $P_{|u_1\rangle} = 0.5$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|u_1\rangle$, να βρεθούν η **Εντροπία** του συστήματος και οι **μέσες τιμές** $\langle\widehat{H}\rangle$ και $\langle\widehat{A}\rangle$.

4) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από **δύο** όμοια διακριτά και **ανεξάρτητα** σωματίδια όπως αυτά του ερωτήματος **3)** τα οποία όμως τώρα έχουν ανταλλαγές θερμότητας με δοχείο θερμότητας οπότε το αναλύουμε στο **κανονικό** σύνολο.
α) Να γράψετε την χαμιλτονιανή του κάθε σωματιδίου (H_1 και H_2 αντίστοιχα) τη συνολική χαμιλτονιανή $\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ και τον τελεστή πυκνότητας του συνόλου των δύο σωματιδίων στη βάση στην οποία η **συνολική** χαμιλτονιανή $\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ είναι **διαγώνια**. Πως σχετίζεται η συνολική συνάρτηση επιμερισμού με τη συνάρτηση επιμερισμού του κάθε σωματιδίου ;
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της ενέργειας (Εσωτερική Ενέργεια) του συστήματος των δύο σωματιδίων παίρνοντας για παράδειγμα $E_2 = 2E_1 \equiv 2E$. Βεβαιώστε ότι πράγματι επαρκεί η συνάρτηση επιμερισμού για τον υπολογισμό αυτό.
γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της $\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$. Μπορούσε να προβλευθεί το αποτέλεσμα αυτό ;