

Όνοματεπώνυμο με κεφαλαία γράμματα: Μαρθαίος Χαυρωτός Α.Μ.: 09106028

ΘΕΜΑ 1.

ΕΡΩΤΗΜΑ Α: Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα και μοναδικό πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n , που παίρνει $n+1$ τιμές f_0, \dots, f_n σε $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία x_0, \dots, x_n .

ΕΡΩΤΗΜΑ Β: Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $p(x)$ για την συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ στα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4$.

ΕΡΩΤΗΜΑ Γ: Να δοθεί άνω φράγμα του σφάλματος $|f(x) - p(x)|$, για $x=1$ και για $x=1/3$.

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται η εξίσωση (1) $x = \frac{\cos x}{2}$ (το x σε ακτίνια).

ΕΡΩΤΗΜΑ Α: Να δειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει μια μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} .

ΕΡΩΤΗΜΑ Β: Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_k = \frac{1}{2} \cos x_{k-1}$, με δεδομένο x_0 , συγκλίνει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ Γ: Να γίνουν 5 επαναλήψεις της μεθόδου, με αρχικό $x_0 = 0.5$, και να δοθεί μία όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος στην πέμπτη επανάληψη.

ΘΕΜΑ 3.

ΕΡΩΤΗΜΑ Α: Να δειχθεί η εκτίμηση σφάλματος της γενικής επαναληπτικής μεθόδου σταθερού σημείου επίλυσης ενός $n \times n$ γραμμικού συστήματος $x_k = Cx_{k-1} + d$

$$\|x_k - x\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x_{k-1} - x_k\|,$$

υποθέτοντας ότι ισχύει $\|C\| < 1$.

ΕΡΩΤΗΜΑ Β: Να επιλυθούν τα δύο γραμμικά συστήματα $Ax = b$ και $Ax = c$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη, εκτελώντας μια μόνο φορά την τριγωνοποίηση του πίνακα A .

ΘΕΜΑ 4.

ΕΡΩΤΗΜΑ Α: Να αποδειχθεί ο σύνθετος τύπος ολοκλήρωσης Simpson καθώς και η αντίστοιχη εκτίμηση σφάλματος. {Δίνεται ο απλός τύπος Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu), \quad \text{με } \mu \in [x_0, x_2]. \}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ Β: Να υπολογιστεί με το σύνθετο τύπο Simpson, με βήμα $h = 0.25$, μια προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{\cos x} dx \quad (\text{το } x \text{ σε ακτίνια}),$$

και να βρεθεί μια εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης.

Διάρκεια Εξέτασης: 2.5 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή Επιτυχία!