ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016, ΩΡΑ 18.00 - 20.30

Θέμα (Θ-1) (Θεώρημα Picard) Έστω D ανοικτό υποσύνολο του $\Re^{n+1}$. Έστω $(t_0, x^0) \in D$ και $a > 0, b > 0$, τέτοια ώστε το σύνολο $R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x^0| \leq b\} \subset D$. Επίσης έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο D, που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x στο D. Τότε για την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_{m+1}(t) =: x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))ds$, $x_0(t) = x^0$ (Επαναλήψεις Picard) να αποδειχθούν: **(i)** Για κάθε m η $x_m(t)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[t_0, t_0 + A]$ και αν $t \in [t_0, t_0 + A]$, τότε $|x_m(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$, όπου $M =: \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in D\}$ και $A =: \min\{a, \frac{b}{M}\}$, και **(ii)** η ακολουθία $\{x_m(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + A]$ σε μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$.

Θέμα (Θ-2) Έστω η συνάρτηση $f(t,x)$ συνεχής και φραγμένη στο πεδίο D. Έστω $x(t)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $x' = f(t,x)$, σε ένα διάστημα $J = (a,b)$. Τότε **(i)** τα όρια $\lim_{t\downarrow a_+} x(t) = x(a^+)$, $\lim_{t\uparrow b_-} x(t) = x(b^-)$ υπάρχουν και **(ii)** αν $(a, \varphi(a^+))$ (αντ. $(b, \varphi(b^-))$ ανήκει στο D, τότε η λύση $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί στα αριστερά του a (στα δεξιά του b).

Θέμα (Π-1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις για τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί αν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το μονοσήμαντο των λύσεων των αντιστοίχων προβλημάτων αρχικών τιμών.

$$(i)\ y'(x) = [x - \sin(y(x))]^{\frac{5}{4}}, \quad y(0) = 0 \text{ και } (ii)\ y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Θέμα (Π-2) Έστω το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + x - 2c^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $c > 0$ σταθερή παράμετρος. **(i)** Να εξετασθούν οι ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. **(ii)** Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}^+$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + x - 2c^2$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο 2;

Θέμα (Π-3) Έστω το δυναμικό σύστημα $x' = -x + y^3$, $y' = -y + ax^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **(i)** Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών για κάθε τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$. **(ii)** Να δείξετε ότι αν $a = 1$ και $V(x,y) \leq R$, όπου $R > 0$ σταθερά και $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, τότε η παράγωγος $V'(x,y)$ της συνάρτησης $V(x,y)$ κατά μήκος των λύσεων του δυναμικού συστήματος ικανοποιεί την ανισότητα $V'(x,y) \leq -2(1-R)V(x,y)$, και **(iii)** Να εκτιμήσετε την περιοχή ευστάθειας του σημείου $0 \in \mathbb{R}^2$ για την περίπτωση $a = 1$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x,y)$ [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ανισότητα $V'(x,y) \leq -2(1-R)V(x,y)$].

Θέμα (Π-4) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $x' = \lambda^6 + 4a\lambda x - x^2$.

***** Να γραφούν ΤΡΙΑ (3) από τα θέματα (Π-1)-(Π-4) *****

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2:30 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!