Επαναληπτική εξέταση στην Πραγματική Ανάλυση, 6/9/2016

Θέμα 1

1,2 (α) Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

0,5 (i) Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

0,4 (ii) Δείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

0,4 (iii) Δείξτε ότι το $-A$ είναι κάτω φραγμένο και επιπλέον ότι $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(β) Έστω το ακόλουθο υποσύνολο στον $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

$$A = \{(x, y) : \quad x \in \mathbb{N}, \quad y \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1)) \cup \{3\}\}.$$

0,4 (i) Δείξτε ότι το A δεν είναι ανοικτό.

0,2 (ii) Βρείτε το $\overline{A}$.

0,2 (iii)Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης του A.

Θέμα 2 (α) Αν F, K συμπαγή μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ), να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_0 \in F$ και $y_0 \in K$ τέτοια ώστε $\rho(F, K) = \rho(x_0, y_0)$, όπου $\rho(F, K) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in K\}$.

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και ρ_1, ρ_2 δύο μετρικές πάνω στο X.

0,4 (i) Πότε οι ρ_1 και ρ_2 λέγονται ισοδύναμες;

0,4 (ii) Αν οι ρ_1 και ρ_2 ισοδύναμες και $x \in X$ σημείο συσσώρευσης του (X, ρ_1), τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του (X, ρ_2).

(iii) Αν (X, ρ_1) συμπαγής και η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ συνεχής, τότε οι ρ_1 και ρ_2 ισοδύναμες.

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\rho(x_n, y_n) \to 0$, ισχύει ότι $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ και $x_0 \in X \setminus A$ ώστε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

(i) Θέτουμε $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\rho(x, x_0)}$ για κάθε $x \in A$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(ii) Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iii) Δείξτε ότι αν $A \subset X$ με την ιδιότητα ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο.

Θέμα 4 Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

0,6 (i) Αν $(f_n)_n$, $f : X \to \mathbb{R}$, δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)_n$ στην f.

0,6 (ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα. $\frac{x^n}{2}$ $|x| < 1$

(iii)Αν X πεπερασμένο και η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα.

0,2 (iv) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $D \subseteq X$ πυκνό ώστε $(f_n|_D)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f|_D$. Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε όλο τον X.