ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 04 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015, ΩΡΑ 15.00 - 18.00

Θέμα (Θ.1) (Θεώρημα Picard) Έστω D ανοικτό υποσύνολο του $\Re^{n+1}$. Έστω $(t_0, x^0) \in D$ και $a > 0, b > 0$, τέτοια ώστε το σύνολο $R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x^0| \leq b\} \subset D$. Επίσης έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο D, που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x στο D. Τότε για την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_{m+1}(t) =: x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))ds$, $x_0(t) = x^0$ (Επαναλήψεις Picard) να αποδειχθούν: (i) Για κάθε m η $x_m(t)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[t_0, t_0 + A]$ και αν $t \in [t_0, t_0 + A]$, τότε $|x_m(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$, όπου $M =: \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in D\}$ και $A =: \min\{a, \frac{b}{M}\}$, και (ii) η ακολουθία $\{x_m(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + A]$ σε μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$.

Θέμα (Θ.2) Να αποδειχθεί ότι αν $f(t,x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\phi(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $x' = f(t,x)$ σ' ένα διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$, τότε η $\phi(t)$ μπορεί να επεκταθεί σ' ένα μέγιστο ανοικτό διάστημα ύπαρξης $J^* \supset J$.

Θέμα (Θ.3) Έστω το δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου $x^+ = f(x)$, $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, όπου I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $0 \in I$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι αν $|f'(0)| < 1$ τότε το $0 \in I$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

*** Να γραφούν ΔΥΟ (2) από τα θέματα (Θ.1) - (Θ.3) ***

Θέμα (Π.1) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών σε μία περιοχή της αρχικής τιμής. Στη συνέχεια να εξεταστεί το μονοσήμαντο των λύσεων γύρω από την αρχική τιμή. 1,5

$$(i)\ y'(x) = [x - y]^{\frac{5}{4}},\quad y(4) = 4 \quad \text{και} \quad (ii)\ y'(x) = [x - y]^{\frac{6}{7}},\quad y(2) = 2.$$

Θέμα (Π.2) (i) Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει σημεία ισορροπίας; Να εξεταστούν οι ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. (ii) Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο 2;

Θέμα (Π.3) Έστω το σύστημα $x' = y$, $y' = x^7 - ax - y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών για κάθε τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$. Να εκτιμήσετε την περιοχή ευστάθειας του $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ για την περίπτωση $a = 2$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2$.

Θέμα (Π.4) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = x^3 + x^2 - \lambda x$, να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών της εξίσωση αυτής για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης.

Θέμα (Π.5) Να βρεθεί η ευστάθεια της αρχής για το σύστημα: $x' = -2x + \lambda y^2 - x^2$, $y' = \mu xy - xy^2$, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$.

Θέμα (Π.6) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί αριθμοί, οι χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές και οι χαρακτηριστικοί εκθέτες του ακόλουθου συστήματος:

$$x' = \begin{bmatrix} \sin(4t) - 1 & 0 \\ \sin(4t) & -1 \end{bmatrix} x.$$

*** Να γραφούν ΤΕΣΣΕΡΑ (4) από τα θέματα (Π.1) - (Π.6) ***

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!