ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΟΔΟΣ: ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2015, ΩΡΑ 17.00 - 19.00

Θέμα 1 (α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$(i)\ y'(x) = (x - y(x))^{\frac{4}{5}},\quad y(3) = 3 \ \text{και}\ (ii)\ y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{\frac{2}{3}},\quad y(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να εξεταστεί το μονοσήμαντο των λύσεων.

(β) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς μη-αρνητικές συναρτήσεις $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, τέτοιες ώστε $f(t) \leq \int_0^t f(s)\,ds$, $0 \leq t \leq 1$.

Θέμα 2 Δίδεται το σύστημα $x' = -x + y$, $y' = -y + \mu x^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, όπου το $\mu \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (σχόλιο: διακρίνετε περιπτώσεις για το $\mu \in \mathbb{R}$). (β) Να εξεταστούν οι ιδιότητες ευστάθειας του κάθε σημείου ισορροπίας. (γ) Αν $\mu > 0$, να δείξετε ότι το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2\mu}\}$ είναι υποσύνολο της περιοχής ευστάθειας του $0 \in \mathbb{R}^2$. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήστε τη Lyapunov συνάρτηση $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ και τις ανισότητες $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, $\mu x^3 y \leq \frac{1}{4}y^2 + \mu^2 x^6$, που ισχύουν για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Τ Α Θ Ε Μ Α Τ Α Ε Ι Ν Α Ι Ι Σ Ο Δ Υ Ν Α Μ Α

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1.30

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α ! ! !