ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016, ΩΡΑ 15.00 - 17.30

Θέμα (Θ-1) (Θεώρημα Picard) Έστω D ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Έστω $(t_0, x^0) \in D$ και $a > 0, b > 0$, τέτοια ώστε το σύνολο $R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x^0| \leq b\} \subset D$. Επίσης έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο D, που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x στο D. Τότε για την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_{m+1}(t) =: x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))ds$, $x_0(t) = x^0$ (Επαναλήψεις Picard) να αποδειχθούν: (i) Για κάθε m η $x_m(t)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[t_0, t_0 + A]$ και αν $t \in [t_0, t_0 + A]$, τότε $|x_m(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$, όπου $M =: \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in D\}$ και $A =: \min\{a, \frac{b}{M}\}$, και (ii) η ακολουθία $\{x_m(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + A]$ σε μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$.

(Θ-2) Έστω η συνάρτηση $f(t,x)$ συνεχής και φραγμένη στο πεδίο D. Έστω $x(t)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $x' = f(t,x)$, σε ένα διάστημα $J = (a,b)$. Τότε (i) τα όρια $\lim_{t \downarrow a+} x(t) = x(a^+)$, $\lim_{t \uparrow b-} x(t) = x(b^-)$ υπάρχουν και (ii) αν $(a, \phi(a^+))$ (αντ. $(b, \phi(b^-))$) ανήκει στο D, τότε η λύση $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί στα αριστερά του a (στα δεξιά του b).

Θέμα (Θ-3) Έστω το δυναμικό σύστημα $x' = f(x)$, όπου $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο και $D \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο. Έστω ότι $0 \in D$ με $f(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Να δείξετε ότι το $0 \in D$ είναι ευσταθές αν υπάρχει θετικά ορισμένη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V : D \mapsto \mathbb{R}^+$ για την οποία $\nabla V(x) f(x) \leq 0$, για όλα τα $x \in D$.

***** Να γραφούν ΔΥΟ (2) από τα θέματα (Θ-1)-(Θ-3) *****

Θέμα (Π-1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις για τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί αν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το μονοσήμαντο των λύσεων των αντιστοίχων προβλημάτων αρχικών τιμών.

$$(i)\ y'(x) = [x - \sin(y(x))]^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0 \text{ και } (ii)\ y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{2}, \quad y(0) = 0.$$

Θέμα (Π-2) **(i)** Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει σημεία ισορροπίας? Να εξεταστούν οι ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. **(ii)** Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο 2?

Θέμα (Π-3) Έστω το δυναμικό σύστημα $x' = -x + y^3$, $y' = -y + ax^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **(i)** Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών για κάθε τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$. **(ii)** Να δείξετε ότι αν $a = 1$ και $V(x,y) \leq R$, όπου $R > 0$ σταθερά και $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, τότε η παράγωγος $\dot{V}(x,y)$ της συνάρτησης $V(x,y)$ κατά μήκος των λύσεων του δυναμικού συστήματος ικανοποιεί την ανισότητα $\dot{V}(x,y) \leq -2(1-R)V(x,y)$, και **(ii)** Να εκτιμήσετε την περιοχή ευστάθειας του σημείου $0 \in \mathbb{R}^2$ για την περίπτωση $a = 1$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x,y)$ [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\dot{V}(x,y) \leq -2(1-R)V(x,y)$].

Θέμα (Π-4) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $x' = x^2 + (\lambda - 1)x - \frac{1}{4}(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$.

*** Να γραφούν ΤΡΙΑ (3) από τα θέματα (Π-1)-(Π-4) ***

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2:30 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!