ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Επαναληπτική εξέταση στη Συναρτησιακή Ανάλυση I,

13-9-2017

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει προβολή $P : X \to Y$. (με χρήση του θεωρήματος επέκτασης γραμμικών τελεστών).

(ii) Ο τελεστής $I - P : X \to X$ είναι προβολή.

(iii) $X = P[X] \bigoplus (I - P)[X]$ (δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχουν μοναδικά $y \in P[X]$, $z \in (I - P)[X]$ ώστε $x = y + z$).

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησιακά με $f, g \neq 0$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = \lambda g$.

(ii) Αν $T : X \to \mathbb{R}^2$ με $T(x) = (f(x), g(x))$ για κάθε $x \in X$, τότε ο T δεν είναι επί.

Θέμα 2 (α) Έστω H χώρος Hilbert και F υπόχωρος του H πεπερασμένης διάστασης. Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του F.

(β) Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονικό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H και $x \in H$. Θέτουμε $x' = \sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Δείξτε ότι:

(i) Αν $F =< e_1, \ldots, e_n >$ τότε $x - x' \perp F$.

(ii) $\|x'\| = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 \big)^{1/2}$.

(iii) $\|x'\| \leq \|x\|$.

(γ) Βρείτε τον ορθογώνιο υπόχωρο καθενός από τους παρακάτω υποχώρους του $\ell^2(\mathbb{N})$.

(i) $F_1 =< \{e_n : n \in \mathbb{N}\} >$.

(ii) $F_2 =< \{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} >$.

(iii) $F_3 = \ker f$ όπου $f \in \ell^2(\mathbb{N})$, $f \neq 0$.

Θέμα 3. (α) (i) Δείξτε ότι για $t \in [0, 1]$ το συναρτησοειδές Dirac $\delta_t : (C[0, 1], \| \cdot \|_{\sup}) \to \mathbb{R}$ ($\delta_t(f) = f(t)$ για $f \in C[0, 1]$) είναι γραμμικό και φραγμένο και υπολογίστε τη νόρμα $\|\delta_t\|$.

(ii) Δείξτε ότι για $t \in [0, 1]$ το συναρτησοειδές Dirac $\delta_t : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο.

(β) Δείξτε ότι αν $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ στο $[0, 1]$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{t_i} \|_{\sup} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

(γ) Έστω $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $[0, 1]$, δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker \delta_{t_n} = \{0\}$.

(ii) Η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι πυκνή στο $[0, 1]$.

Θέμα 4. (α) Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$.

(i) Αν $x^* \in X^*$, με $\|x^*\| = 1$ και $Y \subseteq \ker x^*$, δείξτε ότι $|x^*(x_0)| \leq d(x_0, Y)$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $Y \subseteq \ker x^*$ ώστε $x^*(x_0) = d(x_0, Y)$ όπου

$$d(x_0, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}.$$

(β) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ πυκνό και $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ ώστε

$$\|x_n^*\| = 1, \qquad x_n^*(x_n) = \|x_n\|.$$

Δείξτε ότι $\cap_n \ker x_n^* = \{0_X\}$.