Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων
Τομέας Μαθηματικών

Αντώνιος Συμβώνης

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
14 Φεβρουαρίου 2018

- **Να απαντηθούν ΟΛΑ (5) τα θέματα.**
- **Διάρκεια: 2 ½ ώρες.**
- **Καλή επιτυχία.**

Θέμα 1ο

Δίνεται το παρακάτω γράφημα *G* σε μορφή λίστας γειτνίασης:

κόμβος	Λίστα με γείτονες
1	→/
2	→1 →4 →6→/
3	→1 →/
4	→3 →5 →7 →8 →/
5	→8 →9 →/
6	→4 →5 →9 →/
7	→10 →/
8	→1 →7 →/
9	→1 →8 →/
10	→1 →4 →/

Να πραγματοποιηθεί μία **<u>κατά πλάτος διαπέραση</u>** (breadth first search) του *G* με **<u>αφετηρία τον κόμβο-2</u>**, και να δοθεί το δένδρο κατά-πλάτους διαπέρασης (BFS tree). Να γίνει σεβαστή η σειρά των κόμβων στις λίστες γειτνίασης.

Θέμα 2ο

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E). Να αναπτυχθεί αλγόριθμος που ελέγχει εάν το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο, και στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική να τυπώνει έναν κύκλο.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 3ο

Ένα μονοπάτι ενός **συνδεδεμένου** (μη κατευθυνόμενου) γραφήματος G=(V,E) ονομάζεται μονοπάτι Euler, εάν κάθε ακμή του G **εμφανίζεται στο** μονοπάτι ακριβώς μία φορά. Να αποδειχθεί ότι εάν ακριβώς δυο κόμβοι του γραφήματος, έστω *a* **και** ***b***, **έχουν περιττό** βαθμό, τότε το γράφημα έχει ένα μονοπάτι Euler από τον κόμβο *a* προς τον κόμβο *b*.

Γυρίστε σελίδα….

Θέμα 4ο

Έστω ένα κατευθυνόμενο, με βάρη, ακυκλικό γράφημα G=(V,E) και μια συνάρτηση βάρους $w:E \rightarrow N^+$. Μία τοπολογική αρίθμηση με βάρη, *number()*, του G είναι μία ανάθεση αριθμών στις κορυφές του G τέτοια ώστε για κάθε ακμή $(u,v) \in E$ ισχύει *number(v) >= number(u) + w((u,v))*. Να σχεδιάσετε έναν αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει μία τοπολογική αρίθμηση με βάρη για το γράφημα G.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 5ο

Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα:

PARTITION (Διαχωρισμός)
Δεδομένα: Ένα σύνολο n ακεραίων αριθμών $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $I' \subseteq I = \{1,2,...,n\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I-I'} a_i$;

ZERO-ONE KNAPSACK
Δεδομένα: Ένας φυσικός αριθμός S και ένα σύνολο R αποτελούμενο από n ράβδους $r_1, r_2, ..., r_n$. Κάθε ράβδος r_i έχει μήκος $s_i \in N$.
Ερώτηση: Υπάρχει υποσύνολο R' των ράβδων του R το οποίο έχει συνολικό μήκος ίσο με S;

Με δεδομένο ότι το πρόβλημα PARTITION είναι NP-complete, **να δειχθεί ότι το πρόβλημα ZERO-ONE KNAPSACK είναι επίσης NP-complete.**