



**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών.**

**Επαναληπτική γραπτή εξέταση στη Μαθηματική
Ανάλυση I**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

1. (a) Βρείτε τα όρια των κάτωθι ακολουθών:

$$(i) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{3v}\right)^{3v}, \quad (ii) \beta_v = \sqrt[3]{5v^3 - 2v + 1}$$

$$(β) \text{ Να βρεθούν τα } \sup A, \inf A, \text{ όπου } A = \left\{ \frac{3^v - 4^v}{4^v}, v \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$(γ) \text{ Είναι η ακολουθία } \alpha_v = 1 + \frac{(-1)^v v}{2v-1} \text{ συγκλίνουσα;}$$

2. (a) Έστω $p(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, $\alpha_v > 0$ ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού.

Δείξτε ότι:

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty,$$

(ii) η εξίσωση $p(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

(β) Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο A , δείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .

(γ) Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι συναρτήσεις

$$(i) f(x) = \frac{1}{x+1}, x \in (0, 2), \quad (ii) g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty).$$

3. (a) Έστω ότι $0 < \alpha_v \leq \beta_v, v \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι:

$$(i) \text{ αν } \sum_{v=1}^{+\infty} \beta_v \text{ συγκλίνει, τότε και } \sum_{v=1}^{+\infty} \alpha_v \text{ συγκλίνει,}$$

$$(ii) \text{ αν } \sum_{v=1}^{+\infty} \alpha_v = +\infty \text{ τότε και } \sum_{v=1}^{+\infty} \beta_v = +\infty.$$

(β) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$(i) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{|\sin 2v|}{v\sqrt{v}}, \quad (ii) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(v+2)^2 v!}{(2v)!}.$$

4. Να υπολογιστούν τα κάτωθι ολοκληρώματα:

$$(i) \int \sin^2 x \cos^2 x dx, \quad (ii) \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}, \quad (iii) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$