ΣΕΜΦΕ, Εξέταση στον «Βέλτιστο Έλεγχο», Σεπτεμβριος 2010
Επιλογη:4 θεματα, Διαρκεια:2 +1/2h

Θεμα1.(Α) Δειξτε οτι ο πινακας- λυση της Δ.Ε. Riccati

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q,\ P(T) = F$$

ειναι συμμετρικος με την προυποθεση οτι F, Q, R ειναι συμμετρικοι.

(Β) Με χρήση της Riccati επιλύστε το πρόβλημα του ρυθμιστή

$$\dot{x} = 2x + u,\ J(u) = 10x^2(1) + \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min,\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ δοθέν}$$

και υπολογίστε την τιμή του αρίστου κόστους.

Θεμα 2. Διερευνηση του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = x_1 u,\ J(u) = f x_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min,\ f \in \mathbb{R}$$

$$(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2, \delta o\theta\varepsilon\nu\tau\alpha, \quad u(\bullet) \text{ χωρίς περιορισμούς.}$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο υποψήφιος άριστος έλεγχος είναι σταθερός στο διάστημα [0,1]).

Θέμα3. (Α) Μελέτη του προβλήματος αρίστου χρόνου για το σύστημα $\dot{x}_1 = -x_1 + u,\ \dot{x}_2 = x_2 + u,\ |u(\cdot)| \le 1$. (Β) Δειξτε οτι τα προσιτα συνολα του σύστηματος $\dot{x} = Ax + ub,\ |u(\cdot)| \le 1$ ειναι κυρτα και, αν το συστημα ειναι ελεγξιμο, τοτε ειναι αυστηρως κυρτα .

Θέμα 4. Διερευνηση του προβληματος

$$\dot{x} = u,\ \ x, u \in \mathbb{R}^n,\ J(u) = \int_0^1 L(x(t), u(t))dt \to \min$$

$$x(0)\ \delta o\theta\varepsilon\nu,,\ u(\bullet) \text{ χωρίς περιορισμούς.}$$

Συγκεκριμενα, δειξτε οτι το L ικανοποιει την εξισωση Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial u}(x(t), u(t))) = \frac{\partial L}{\partial x}((x(t), u(t)), t \in [0,1]$, οπου $(x(t), u(t))$ το ζευγαρι αριστης τροχιας, ελεγχου. Επιλυστε το προβλημα στην περιπτωση $n = 2$ και $L(x, u) = x_1 + x_2 + u_1^2 + u_2^4$.

Θέμα 5.Για το ελέγξιμο σύστημα $\dot{x} = Ax + ub,\ |u(\cdot)| \le 1$, δείξτε ότι, αν ικανοποιείται η αρχή του μεγίστου στο διάστημα $[0, T]$, τοτε η αντιστοιχη τροχια ειναι ακροτατη σε καθε διάστημα $[0, \tau] \subset [0, T], \tau > 0$

Θέμα 6. Επίλυση του προβλήματος

$$\dot{x} = u,\ x \in \mathbb{R},\ -1 \le u \le 2,\ J(u) = \tfrac{1}{50}x^2(1) + \int_0^T (x(t) + u^2(t))dt \to \min,\ x(0), T \text{ δοθέντα.}$$

---- Laplace: $t^n \exp(-at)/n! \to 1/(s+a)^{n+1}$
$\sin kt \to k/(k^2+s^2),\ \cos kt \to s/(k^2+s^2)$