- Προβλήματα με περιορισμούς

$\dot{x} = f(x,u)\ ,\ (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}\ ,\ \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

$J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt \to \min$

$$H = -f_0 + n' f$$

$$\dot{x} = (H_n)' = f(x,u)$$

$$\dot{n} = -(H_x)' = (f_0)'_x + (f)'_x n$$

$$x_0 = x(0)$$

$$n(T) = -[g_x(x(T))]'$$

M.P: $H(n(t), x(t), u(t)) = \max\limits_{v \in \mathcal{U}} \big(H(n(t), x(t), v)\big)$

(Σχέδιο)

- Hamiltonian ($u(\cdot)$ χωρίς περιορισμούς)

$H = -f_0 + n' f$

$$\begin{cases} \dot{x} = (H_n)' = f(x,u) \\ \dot{n} = -(H_x)' = (f_0)'_x - (f_x)' n \end{cases} \quad \text{με} \quad \left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ n(T) = -[g_x(x(T))]' \end{array}\right\}$$

τότε ο άριστος έλεγχος $u(\cdot)$ ικανοποιεί υποχρεωτικά την αρχή του μεγίστου

$$H_u(n(t), x(t), u(t)) = 0 \quad \text{σχεδόν } \forall t \in [0,T)$$

Π.Α.Χ.

- Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί $\det(B, AB) \neq 0$
- Πεδίο φάσεων $u = \pm 1$
- Βρίσκω για τις δύο περιπτώσεις τα x_1, x_2 και κάνω απαλοιφή χρόνου.

(Σχέδιο)

Riccati: $\left.\begin{array}{l} \dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \\ P(T) = E \end{array}\right\} \Rightarrow$ $u = -R^{-1}B'P(t)x(t)$ είναι το u_{opt} και $J(u_{opt}) = x'(0)P(0)x(0)$

P συμετρικός

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \quad (*) \quad , P(T) = F$$

με F, Q, R συμετρικοί

τότε: $\dot{P}' = -A'P' - P'A + P'(B')'(R^{-1})'B'P' - Q' \Rightarrow$

$$\dot{P}' = -A'P' - P'A + P'BR^{-1}B'P' - Q \quad \text{με } P'(T) = F$$

Αφού και ο P' ικανοποιεί την ίδια εξίσωση (*) και απο μονοσύμαντο των λύσεων πρέπει $P' = P$

Άρα ο P συμετρικός