Riccati — Hamiltonian — ΠΑΧ

1–3    3β – 6β    (1) – (4β)    1

Το $\dot{x} = Ax + Bu$ έχει λύση

$$x(t, x_0, u) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds,$$

όπου ~~αχχ~~ $A_{n\times n}$, $B_{n\times m}$ σταθεροί πίνακες και

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

ή αλλιώς

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}, \text{ με } X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

όπου $U(s) = \mathcal{L}u$

<u>Πρόβλημα Αρίστου Ελέγχου</u> (Π.Α.Ε)

$\Sigma: \dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(s), u(s)) ds$$

Δοθείσης μιας αρχικής κατάστασης $x_0 \in \mathbb{R}^n$ να βρεθεί (αν υπάρχει) αποδεκτός έλεγχος $u_{opt}(s)$, $s \in [0, t]$ έτσι ώστε $J(u_{opt}) \leq J(u)$, $\forall u$

Το $x(t) = x(t, x_0, u)$ ονομάζεται <u>τροχιά</u> του $\Sigma$ που ξεκινά από το $x_0$ και αντιστοιχεί στην "είσοδο" $u = u(t)$.

Το σύνολο $\{u(\cdot) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m\}$ το λέμε χώρο εισόδων

Το $\mathbb{R}^n$ χώρο καταστάσεων και το $x$ κατάσταση.

Έχουμε το πρόβλημα του ρυθμιστή

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad , \quad A_{n\times n}, B_{n\times m}$$

$$J(u) = x'(T) F x(T) + \int_0^T \left( x'(s) Q x(s) + u'(s) R u(s) \right) ds \longrightarrow \min$$

$F_{n\times n} \geq 0$ , $Q_{n\times n} \geq 0$, $R > 0$

Επίλυση με την μέθοδο Riccati

$$\left.\begin{aligned} \dot{P} &= -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \\ P(T) &= F \end{aligned}\right\}$$

$\Longrightarrow$ $u = -R^{-1}B'Px$ είναι το $u_{opt}$

και $J_{opt} = x'(0) P(0) x(0)$

## Παραδείγματα

1) $\dot{x} = x + u$ , $x_0$ δοθέν

$$J(u) = x^2(1) + \int_0^1 (x^2 + u^2)\, dt \longrightarrow \min$$

$$A = B = F = Q = R = 1$$

Άρα $\quad \dot{P} = -2P + P^2 - 1 \quad , P(1) = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{P}}{P^2 - 2P - 1} = 1$$

$$\frac{1}{P^2 - 2P - 1} = \frac{1}{\big(P - \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{=a_1}\big)\big(P - \underbrace{(1-\sqrt{2})}_{=a_2}\big)} = \frac{A_1}{P - (1+\sqrt{2})} + \frac{A_2}{P - (1-\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad , A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

([illegible] $1-\sqrt{2}$) [illegible] 2 [illegible] $\rho_1 , \rho_2$)

Άρα
$$\frac{\dot{P}}{P^2 - 2P - 1} = \frac{A_1 \dot{P}}{P - a_1} + \frac{A_2 \dot{P}}{P - a_2} = 1 \xrightarrow[T=1]{\int_t^T}$$

$$A_1 \int_t^1 \frac{\dot{P}}{P - a_1}\, ds + A_2 \int_t^1 \frac{\dot{P}}{P - a_2}\, ds = 1 - t \quad \Rightarrow$$

$$A_1 \ln \frac{P(1) - a_1}{P(t) - a_1} + A_2 \ln \frac{P(1) - a_2}{P(t) - a_2} = 1 - t \quad \Rightarrow$$

$$\ln \frac{1 - a_1}{P(t) - a_1} - \ln \frac{1 - a_2}{P(t) - a_2} = 2\sqrt{2}\,(1 - t) \quad \Rightarrow$$

$$\ln \frac{1-a_1}{p(t)-a_1}\,\frac{p(t)-a_2}{1-a_2} = 2\sqrt{q}\,(1-t) \Rightarrow$$

$$\frac{1-a_1}{p(t)-a_1}\,\frac{p(t)-a_2}{1-a_2} = \underbrace{\exp\left(2\sqrt{q}(1-t)\right)}_{=\phi(t)} \Rightarrow$$

$$p(t) = \frac{a_1 + a_2\phi}{1+\phi}$$

$$u_{op} = -R^{-1}B'Px = p(t)\,x(t)$$

$$J_{opt} = x'(0)P(0)x(0) = x_0' \,\frac{a_1+a_2\phi(0)}{1+\phi(0)}\,x_0$$

2) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ , $x_0 \in \mathbb{R}^2$ δοθέν

$$J(u) = 2x_2^2(T) + \int_0^1 \left(x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt \to \min$$

$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $R = 1$

Ο $P$ είναι συμμετρικός (βλ. θεωρία)

$$P(t) = \begin{pmatrix}P_1 & P\\ P & P_2\end{pmatrix}$$

$$-PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q = -\begin{pmatrix}P_1 & P\\ P & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & P\\ P & P_2\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}P_1 & P\\ P & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & P\\ P & P_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P^2 & PP_2 - P_1\\ PP_2 - P_1 & -2P + P_2^2 - 1\end{pmatrix}$$

Άρα

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 & \dot{p} \\ \dot{p} & \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & p\,p_2 - p_1 \\ p\,p_2 - p_1 & -2p + p_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p^2 \\ \dot{p} &= p\,p_2 - p \\ \dot{p}_2 &= -2p + p_2^2 - 1 \end{aligned}\right\} \text{ με } \quad \begin{aligned} p_1(1) &= 0 \\ p(1) &= 0 \\ p_2(1) &= 2 \end{aligned}$$

$$P(1) = \begin{pmatrix} p_1(1) & p(1) \\ p(1) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Αν $p_1 \equiv 0$, $p \equiv 0$, τότε

$$\dot{p}_2 = p_2^2 - 1 \Rightarrow \frac{\dot{p}_2}{p_2^2 - 1} = 1 \Rightarrow A_1 \frac{\dot{p}_2}{p_2 + 1} + A_2 \frac{\dot{p}_2}{p_2 - 1} = 1$$

(όπου $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$) $\xrightarrow{\int_t^1} \ln \frac{p_2(1)+1}{p_2(t)+1} - \ln \frac{p_2(1)-1}{p_2(t)-1} = 2(1-$

$$\Rightarrow \ln 3\,\frac{p_2(t)-1}{p_2(t)+1} = 2(1-t) \Rightarrow \frac{p_2(t)-1}{p_2(t)+1} = \underbrace{\frac{1}{3}\exp(2(1-t))}_{\phi}$$

$$p_2(t) = \frac{\phi(t)+1}{1-\phi(t)}$$

$$u_{opt} = -R^{-1}(0\ 1)P(t)\,x(t) =$$

$$J_{opt} = x_0' P(0) x_0$$

## Hamiltonian του προβλήματος

$$H := -f_0 + \eta' f \quad , H = H(\eta, x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (H_\eta)' \\ \dot{\eta} = -(H_x)' = -\left(-(f_0)_x + \eta' f_x\right)' = (f_0)'_x - (f_x)'\eta \\ \text{με} \quad x(0) = x_0 \ , \ \eta(T) = -\left(g_x(x(T))\right)' \ , \ (x(t), \eta(t)) \ , t \in [0,T] \end{cases}$$

Από αρχή μεγίστου $H_u(\eta(t), \underbrace{x(t)}_{\text{άριστη τροχιά}}, \underbrace{u(t)}_{\text{άριστος έλεγχος}}) = 0$ σχεδόν $\forall t \in [0,T]$

Αν το $(\Sigma)$ έχει λύση, τότε η άριστη τροχιά $x(t)$ και ο άριστος έλεγχος $u(t)$ θα ικανοποιούν την $H_u = 0$.

## Παραδείγματα

1) $\dot{x} = x + u \ , x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$

$$J(u) = x^2(1) + \int_0^1 u^4(t)\, dt \longrightarrow \min$$

$$f(x,u) = x + u \ , \quad g(x(T)) = x^2(1) , \quad f_0(x,u) = u^4$$

Η Hamiltonian του συστήματος

$$H = -f_0 + \eta' f = -u^4 + \eta(x+u)$$

$$\begin{cases} H_x = \eta & -\dot{\eta} \\ H_\eta = x + u & \dot{x} \\ H_u = -4u^3 + \eta \end{cases}$$

Αρχή Μεγίστου: $H_u(n(t), x(t), u(t)) = 0 \iff$

$-4u^3(t) + n(t) = 0 \iff u(t) = \left(\frac{1}{4} n(t)\right)^{1/3} \quad t \in [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = H_n = x + u = x + \left(\frac{1}{4} n(t)\right)^{1/3} \\ \dot{n} = -H_x = -n \quad \text{[illegible]} \\ x(0) = x_0 \\ n(1) = -g_x(x(1)) = -2\, x(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$n(t) = n(0) e^{-t}$ και άρα $\dot{x} = x + \underbrace{\left(\frac{1}{4} n(0) e^{-t}\right)^{1/3}}_{u \text{ [illegible]}}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{t} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)} \left(\frac{1}{4} n(0)\right)^{1/3} e^{-s/3}\, ds$$

$$= e^{t} x_0 + \left(\frac{1}{4} n(0)\right)^{1/3} \int_0^t e^{t-s} e^{-s/3}\, ds$$

Το $n(0)$ προσδιορίζεται από την αρχική

$n(1) = -2x(1) \iff$

$n(0) e^{-1} = -2\left(e x_0 + \left(\frac{1}{4} n(0)\right)^{1/3} e \int_0^1 e^{-4s/3}\, ds\right)$

Θέτουμε $f = n(0)^{1/3}$ και αναζητούμε τις ρίζες του

$p(f) = f^3 e^{-1} + 2e x_0 - \frac{1}{2} f e \int_0^1 e^{-4s/3}\, ds$ (εδώ σταματάμε...

2) $\dot{x} = u$ , $x(0) = x_0$ δοσεν

$$J(u) = \int_0^1 (u^2 - x^2)\, dt \to \min$$

$$f = u, \quad g = 0, \quad f_0 = u^2 - x^2$$

$$H = -f_0 + n f = -u^2 + x^2 + n u$$

$$\begin{cases} H_x = 2x \\ H_n = u \\ H_u = -2u + n \end{cases}$$

Αρχη μεγιστου $H_u(n(t), x(t), u(t)) = 0 \Rightarrow -2u(t) + n(t) = 0$,

$t \in [0,1] \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} n(t)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= H_n = u \\ \dot{n} &= -H_x = -2x \\ x(0) &= x_0 \\ n(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} n \\ \dot{n} &= -2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ n(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\left( (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ n(0) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1/2}{s^2+1} \\ -\frac{2}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} & \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ n(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \frac{1}{2}\sin t \\ -2\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ n(0) \end{pmatrix}$$

Άρα $x(t) = x_0 \cos t + \frac{1}{2} n(0) \sin t$

$n(t) = -2x_0 \sin t + n(0) \cos t$

Το $n(0)$ προσδιορίζεται από την αρχική $n(1)=0$

δηλ. $-2x_0 \sin 1 + n(0)\cos 1 = 0 \Rightarrow$

$n(0) = 2x(0) \tan 1$

Άρα $u_{\beta\varphi} = \frac{1}{2} n(t) = -x_0 \sin t + 2x_0 \tan 1 \cos t$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$

$J(u) = x_2^4(1) + \int_0^1 u^2 ds \to \min$

$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad g = x_2^4, \quad f_0 = u^2$

$H = -f_0 + n^T f = -u^2 + (n_1 \; n_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + n_1 x_2 + n_2 u$

$\begin{cases} H_u = -2u + n_2 \\ H_x = (0, n_1) \\ H_n = (x_2, u) \end{cases}$

Από αρχή μεγίστου $H_u(n(t), x(t), u(t)) = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} n_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = H_\eta \\ \dot{\eta} = -H_x \\ x(0) = x_0 \\ \eta(1) = -g_x(x(1)) = (0, -4x_2^3(1)) \end{cases}$$

$(x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{2}\eta_2 \\ 0 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$$

$\dot{\eta}_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_{10}$

$\dot{\eta}_2 = -\eta_{10} \Rightarrow \eta_2(t) = \overset{c}{\overset{\shortparallel}{\eta_{20}}} - \eta_{10} t$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}\eta_2 = \frac{1}{2}\underset{\underset{c}{\shortparallel}}{\eta_{20}} - \frac{1}{2}\eta_{10} t \Rightarrow x_2(t) = x_{20} + \frac{1}{2}\eta_{20} t - \frac{1}{4}\eta_{10} t^2$

$\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_1(t) = x_{10} + x_{20} t + \frac{1}{4}\eta_{20} t^2 - \frac{1}{12}\eta_{10} t^3$

$x_1(0), x_2(0)$ δοσμένα

$\eta(1) = -g_x(x(1)) \Leftrightarrow (\eta_1(1), \eta_2(1)) = (0, -4x_2^3(1))$

<u>Προσδιορισμός των $\eta_{10}, \eta_{20}$</u>

Απο τις τελικές συνθήκες

$\eta_1(1) = 0 \Leftrightarrow \eta_{10} = 0$

$\eta_2(1) = -4x_2^3(1) \Leftrightarrow \eta_{20} - \underset{0}{\cancel{\eta_{10}}} = -4\left(x_{20} + \frac{1}{2}\eta_{20} - \frac{1}{4}\overset{0}{\cancel{\eta_{10}}}\right)^3$

$\Rightarrow \eta_{20} = \ldots$

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 u \\ \dot{x}_2 = x_2 u \end{cases}$

$$J = x_1^2(1) + 2x_2^2(1) + \int_0^1 u^2\,dt \to \min, \quad x_0 = (1,1)$$

Υποδ: Δ.ο. ο υποψήφιος έλεγχος u είναι σταθερός

~~Εκ~~ $f = \begin{pmatrix} x_1 u \\ x_2 u \end{pmatrix}$, $g = x_1^2 + 2x_2^2$, $f_0 = u^2$

$$H = -f_0 + \eta' f = -u^2 + (\eta_1\ \eta_2)\begin{pmatrix} x_1 u \\ x_2 u \end{pmatrix} = -u^2 + \eta_1 x_1 u + \eta_2 x_2 u$$

$$\begin{cases} H_u = -2u + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 \\ H_x = (\eta_1 u, \eta_2 u) \\ H_\eta = (x_1 u, x_2 u) \end{cases}$$

Αρχή Μεγίστου: $H_u(\eta(t), x(t), u(t)) = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)$ (*)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 u \\ \eta_2 u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 u \\ x_2 u \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $\eta_1(1) = -2x_1(1)$, $\eta_2(1) = -4x_2(1)$

Θ.δ.ο. $u = const =$ σταθερά

$$\dot{u} = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1 x_1 + \eta_1 \dot{x}_1) + \frac{1}{2}(\dot{\eta}_2 x_2 + \eta_2 \dot{x}_2) = \frac{1}{2}(-\eta_1 u x_1 + \eta_1 x_1 u)$$

$$+ \frac{1}{2}(-\eta_2 u x_2 + \eta_2 u x_2) = 0 \Rightarrow u \text{ σταθερά}$$

$\dot{x}_1 = x_1 u \Rightarrow x_1(t) = x_{10} e^{ut}$

$\dot{x}_2 = x_2 u \Rightarrow x_2(t) = x_{20} e^{ut}$

$\dot{n}_1 = -n_1 u \Rightarrow n_1(t) = n_{10} e^{-ut}$

$\dot{n}_2 = -n_2 u \Rightarrow n_2(t) = n_{20} e^{-ut}$

Τελικές συνθήκες $n_1(1) = -2x_1(1) \Leftrightarrow$

$n_{10} e^{-u} = -2e^{u}$ (α)

$n_2(1) = -4x_2(1) \Leftrightarrow n_{20} e^{-u} = -4e^{u}$ (β)

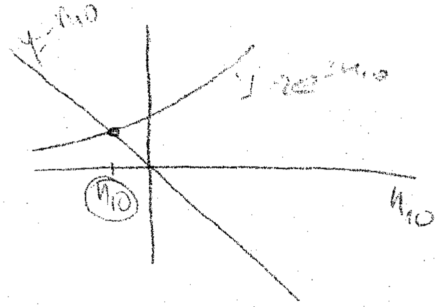
$x_{02} = 1$

Άρα από (α), (β): $\frac{n_{10}}{n_{20}} = \frac{1}{2}$ και

$n_{10} = -2e^{2u}$

Άρα $n \rightarrow u = \frac{1}{2}(n_{10} + n_{20}) = \frac{1}{2}(n_{10} + 2n_{10}) = \frac{3}{2} n_{10}$

$\Rightarrow n_{10} = -2e^{2u} = -2e^{3n_{10}}$




$-n_{10} = 2e^{3n_{10}}$

$y = e^{3t}$

Απο την * για $t=0$ εχω
και αφου u σταθερη
$u(t) = u(0)$

1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί $\det(b, Ab) =$

$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

Πεδίο φάσεων για τις περιπτώσεις

1) $u = +1$

2) $u = -1$

σύμφωνα [illegible] διαδικασία [illegible] [illegible] Αρχή μεγίστου έχω ότι για $u=1$ ή $u=-1$ θα προκύπτει ακραία τροχιά

1) $u = 1$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \int: x_2(t) - x_2(0) &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(0) + t \\ x_2(t) &= x_2(0) + t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) - x_1(0) &= x_2(0)t + \frac{t^2}{2} \\ x_2(t) &= x_2(0) + t \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{τον χρόνο}]{\text{Απαλοίφουμε}}$$

Για $t = x_2(t) - x_2(0)$, έχουμε

$$x_1(t) - x_{10} = x_{20}(x_2 - x_{20}) + \frac{(x_2 - x_{20})^2}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_{10} + x_{20}x_2 - x_{20}^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_{20}^2 - x_2 x_{20} =$$

$$= \frac{1}{2}x_2^2 + \underbrace{\left(x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2\right)}_{\text{σταθερά} = c} = \frac{1}{2}x_2^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) $u=-1$:

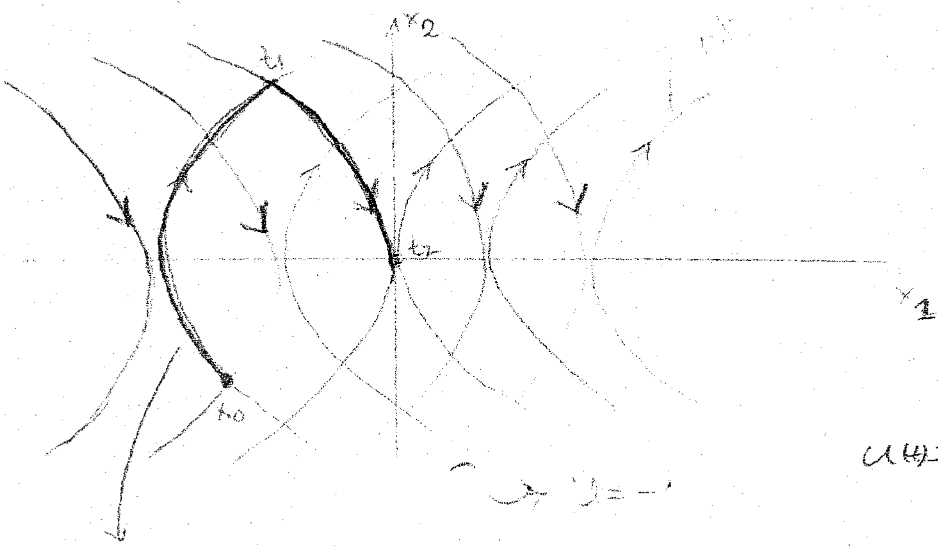
$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ x_2(t)-x_2(0) &= -t\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_{20}-t\\ x_2 &= x_{20}-t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}x_1(t)-x_1(0) &= x_{20}t-\frac{t^2}{2}\\ t &= x_{20}-x_2\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{απαλοιφή χρόνου}}$$

$$x_1 = x_{10}+x_{20}(x_{20}-x_2)-\frac{1}{2}(x_{20}-x_2)^2 =$$

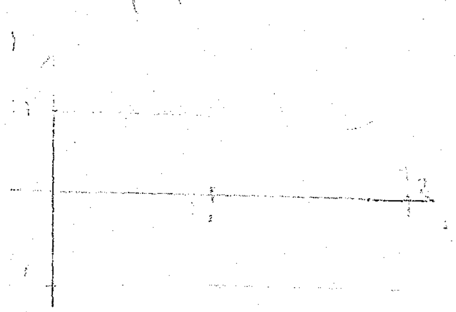
$$= x_{10}+x_{20}^2-\cancel{x_{20}x_2}-\frac{1}{2}x_{20}^2+\cancel{x_{20}x_2}-\frac{1}{2}x_2^2$$

$$= -\frac{1}{2}x_2^2+c, \quad c\in\mathbb{R}$$




$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{για } 0<t<t_1\\ -1 & \text{για } t_1<t<t^*\end{cases}$$

ωραία διαφορά π.χ.



(αυτό λύνεται με ορίζουσα B, AB και ιδιοτιμές του A)

9) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί $\det(b, Ab) =$
$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Πεδίο διανυσμάτων για τις περιπτώσεις $u=+1$, $u=-1$

1) $u=+1$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 1 \Rightarrow x_1(t) = x_1(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-t+s}\,ds =$$
$$= e^{-t}\left(x_{10} + \int_0^t e^{s}\,ds\right) =$$
$$= e^{-t}\left(x_{10} + e^{t} - 1\right) =$$
$$= e^{-t}(x_{10} - 1) + 1$$

$$\dot{x}_2 = 1 \Rightarrow x_2 = x_2(0) + t = x_{20} + t$$

Απαλοιφή χρόνου:

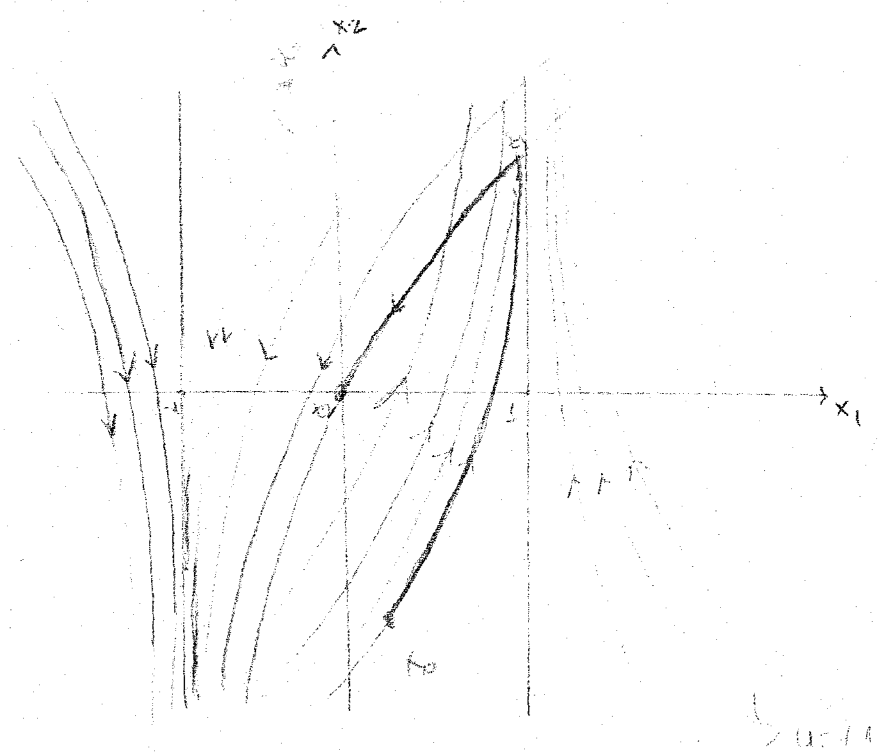
$t = x_2 - x_{20}$ $\quad e^{x_{20}}(x_{10}-1)$

$$x_1 = Ce^{-x_2} + 1 \quad , c \in R$$

2) Ομοίως για $u=-1$

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_1(0)e^{-t} - \int_0^t e^{t-s}\,ds = e^{-t}(x_{10}+1) - 1$$
$$\dot{x}_2 = -1 \Rightarrow x_2 = x_2(0) - t = x_{20} - t$$

Απαλοιφή χρόνου $t = x_{20} - x_2$ $\quad x_1 = C e^{x_2} - 1 \quad , c \in R$



$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1] \\ -1, & t \in [t_1, t_f] \end{cases}$$

$L = \mathbb{R}^2$ γραφικά παρατηρώ ότι από οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ και να ξεκινήσω μπορώ να φτάσω στο $(0,0)$.

3) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί $\det(b, Ab) =$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

Πεδίο φάσεων για $u=+1$, $u=-1$.

1) $u=+1$:

$\dot{x}_1 = -x_1 + 1 \Rightarrow x_1(t) = e^{-t}(x_{10} - 1) + 1$

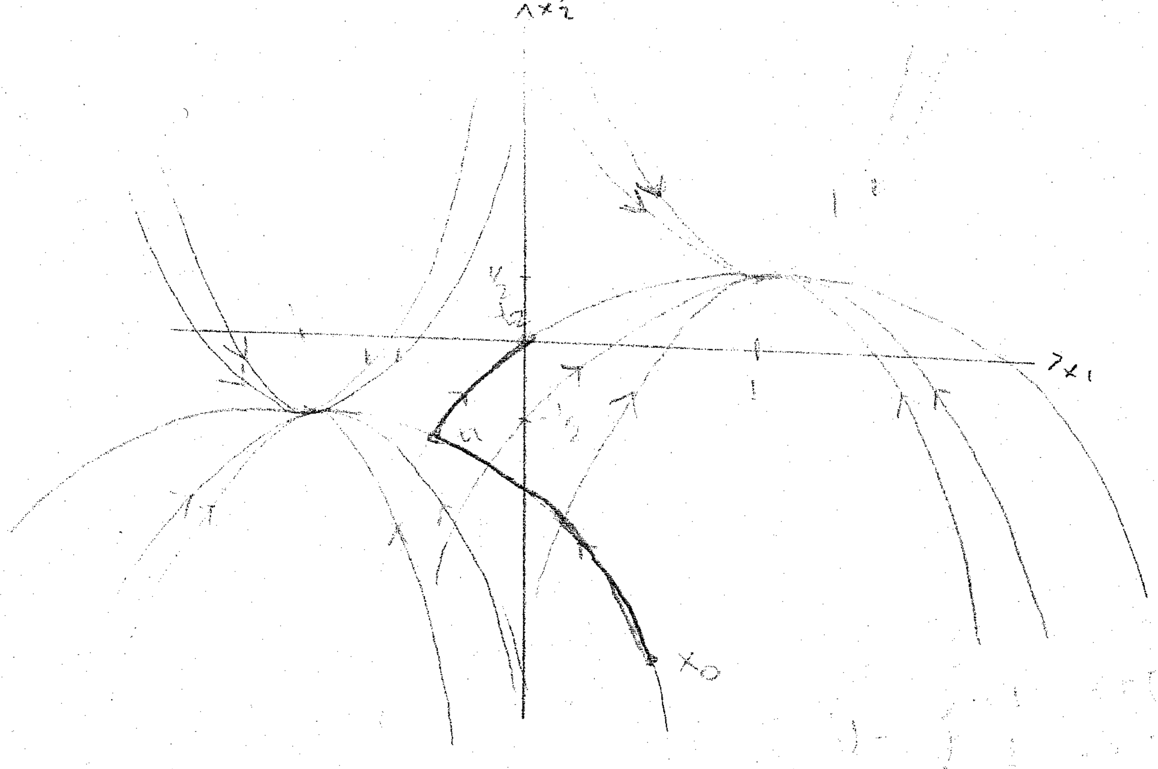
$\dot{x}_2 = -2x_2 + 1 \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2} + e^{-2t}\left(x_{20} + \frac{1}{2}\right)$

Απαλοιφή χρόνου: $\dfrac{x_2 - \frac{1}{2}}{(x_1 - 1)^2} = \dfrac{e^{-2t}\left(x_{20} + \frac{1}{2}\right)}{e^{-2t}(x_{10} - 1)^2} = \dfrac{x_{20} + \frac{1}{2}}{(x_{10} - 1)^2} \Rightarrow$

$x_2 - \frac{1}{2} = (x_1 - 1)^2 \cdot \dfrac{x_{20} + \frac{1}{2}}{(x_{10} - 1)^2} = C(x_1 - 1)^2$

Ομοίως για $u=-1$ έχουμε

$$x_2 + \frac{1}{2} = C\,(x_1 + 1)^2$$




$$4)\quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

το έλεγχο [illegible] γραμμικά [illegible] έλεγχο στο θεωρία [illegible] π.χ.

Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί $\det(b, Ab) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Πεδίο φάσεων για $u=+1$, $u=-1$.

1) $u=+1$:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = e^{t} x_1(0) + \int_0^t e^{t-s}\,ds = e^{t}(x_{10}+1) - 1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_2 = e^{2t} x_2(0) + \int_0^t e^{2(t-s)}\,ds = e^{2t} x_{20} + e^{2t}\left[\frac{e^{-2s}}{-2}\right]_0^t =$$

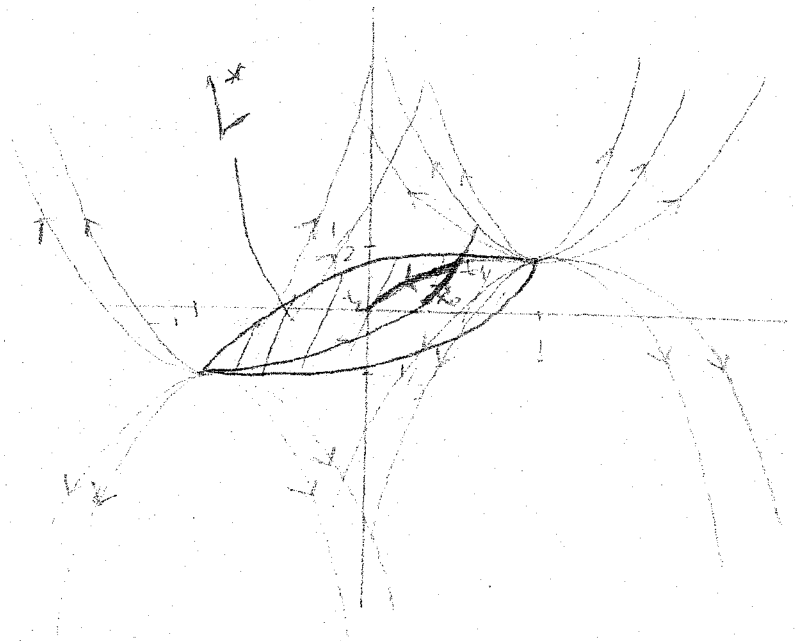
$$= e^{2t} x_{20} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}\right) = e^{2t}\left(x_{20} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

Απαλοιφή χρόνου: $\dfrac{x_2+\frac{1}{2}}{(x_1+1)^2} = \dfrac{x_{20}+\frac{1}{2}}{(x_{10}+1)^2}$

$$x_2+\frac{1}{2} = (x_1+1)^2\,\frac{x_{20}+\frac{1}{2}}{(x_{10}+1)^2} \Rightarrow x_2+\frac{1}{2} = C(x_1+1)^2,\ C\in\mathbb{R}$$

Για $u=-1$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{t}(x_{10}-1)+1 \\ x_2 &= e^{2t}\left(x_{20}-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{χρόνου}]{\text{Απαλοιφή}} x_2-\frac{1}{2} = C(x_1-1)^2,\ C\in\mathbb{R}$$




* Από οποιοδήποτε σημείο αυτού του χωρίου και να ξεκινήσω θα βρω τροχιά που να με οδηγεί στο μηδέν. (L)

5) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο γιατί
$\det(b, Ab) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

Το πεδίο των λύσεων για $u=+1$, $u=-1$:

$u=+1$: $\dot{x}_1 = -x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = e^{-t}(x_{10}-1)+1$

$\dot{x}_2 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_2 = e^{2t}\left(x_{20}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

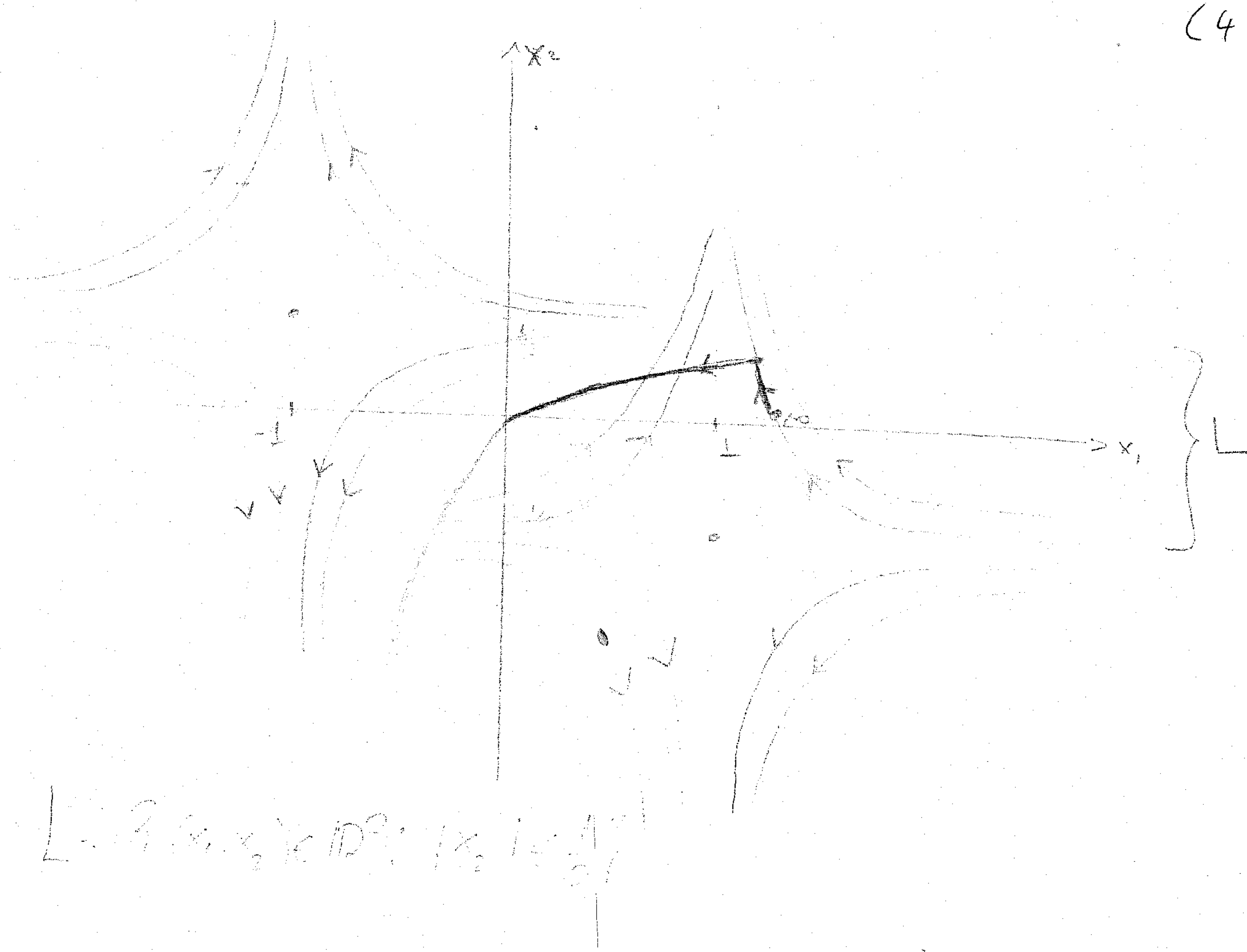
$\xrightarrow[\text{χρόνου}]{\text{Απαλ.}}$ $\cancel{\frac{x_2+\frac{1}{2}}{(x_1-1)^2} = \frac{e^{2t}\left(x_{20}+\frac{1}{2}\right)}{e^{-t}(x_{10}-1)^2}}$ $\left(x_2+\frac{1}{2}\right)(x_1-1)^2 = \underbrace{\left(x_{20}+\frac{1}{2}\right)(x_{10}-1)^2}_{=C}$

$$\Rightarrow x_2 + \frac{1}{2} = \frac{C}{(x_1-1)^2}$$

$u=-1$: $\dot{x}_1 = -x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = e^{-t}x_{10} + \int_0^t e^{-(t-s)}ds = e^{-t}(x_{10}-1)+1$

$\dot{x}_2 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_2 = e^{2t}x_{20} + \int_0^t e^{2(t-s)}ds = e^{2t}\left(x_{20}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

$\xrightarrow[\text{χρόνου}]{\text{Απαλ.}}$ $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{C}{(x_1+1)^2}$




## Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου (Π.Ε.Χ)

$\dot{x} = Ax + Bu \quad (*)$

Δίνεται μια αρχική κατάσταση $x_0 \neq 0$. Θέλουμε να βρεθεί έλεγχος $u^* \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ που οδηγεί το σύστημα (*) από την κατάσταση $x_0$ στην αρχή των αξόνων $0 \in \mathbb{R}^n$ σε ελάχιστο δυνατό χρόνο $t^*$. Αν υπάρχει ο εν λόγω $u^*$ τον καλούμε έλεγχο άριστου χρόνου, την άριστη χρονική στιγμή $t^*$ άριστο χρόνο και την αντίστοιχη τροχιά $x(t, x_0, u^*)$, $0 \le t \le t^*$, άριστη τροχιά.

$L = \{ z \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U$ και $t > 0$ με $x(t, z, u) = 0 \}$

*Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο (πρέπει $\det(B, AB) \neq 0$ για $n=2$) και τα πραγματικά μέρη όλων των ιδιοτιμών του $A$ είναι γνησίως αρνητικά $\Rightarrow L = \mathbb{R}^n$ *