non mi ami dipiú) :(

Βέλτιστος σχεδιασμός

$$T: X \to \mathbb{R} \quad , X = \mathbb{R}^n$$

$x_0 \in X$ $\quad T(x_0) \le T(x) \quad \forall x$ κοντά στο x_0 $\{\delta h \rbrack.\ \forall x \quad |x - x_0| \le \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0 \}$

$$X = \{ x = x(t) : C^1[t_1, t_2],\ x(\cdot) \in \mathbb{R}^n \}$$

$$\|x\| = \max \{ |x(t)| + |\dot{x}(t)| \}$$

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \to \min$$

Ορίζουμε παράγωγο.

$\delta T(x_0, h)$, πρώτη μεταβολή, για δοθέν h

$$\delta T(x_0, h) = \lim_{a \to 0} \frac{T(x + ah) - T(x)}{a} \quad (\forall h \in X)$$

π.χ. $\quad T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad T \in C^1$

$$\delta T(x_0, h) = \nabla T(x_0)\, h.$$

γραμμή ... στήλη

αφ. $\nabla T(x_0) = 0 \iff \nabla T(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ παράγωγος Gateaux.

Όταν $\delta T(x_0, h) = 0 \quad \forall h \overset{\text{τότε}}{\Longrightarrow} x_0$ στατικό σημείο.

Αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο ή μέγιστο

δηλ $T(x_0) \leq T(x)$ κοντά στο x_0

$$\{ \delta T(x_0, h) = 0 \ , \ \forall h \in X \}$$

δηλαδή x_0 : στατικό σημείο.

Θα εστιάσουμε στην $T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\, dt$

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}, \ C^1$$

όπου υποθέτουμε ότι ο $X = \{ x = x(t), \ t \in [t_1, t_2] \text{ κλάσεως } C^1 \}$

ο οποίος όπως είδαμε είναι (διανυσματικός) και διαθέτει νόρμα,

Gateau: $\delta T(x_0, h) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \left(T(x+ah) - T(x) \right)$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(x+ah, \dot{x} + a\dot{h}, t) - \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\, dt \right.$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \left(f(x+ah, \dot{x} + a\dot{h}, t) - f(x, \dot{x}, t) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{da} \left(f(x+ah, \dot{x} + a\dot{h}, t) \right) \Big|_{a=0} dt =$$

$$= \boxed{\int_{t_1}^{t_2} (f_x(x,\dot{x},t)h + f_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)\dot{h})\,dt}$$ άρα $\exists$ η

Παράγωγος Gateaux

Εύρεση Αναγκαίας συνθήκης

(Εξισώσεις Euler-Lagrange)

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x,\dot{x},t)\,dt$$

Αν στο $x \in X$ η T έχει ελάχιστο γνωρίζουμε ότι

$$\delta T(x,h) = 0 \quad \forall h \in X \quad \text{δηλ}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_x(\ )h + f_{\dot{x}}(\ )\dot{h})\,dt = 0 \quad ① \quad \forall h \in X$$

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}(\ )h\right) = \frac{d}{dt}[f_{\dot{x}}(\ )]h + f_{\dot{x}}(\ )\dot{h} \quad ②$$

① + ② $\Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(\ ) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(\ )\right] h\,dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[f_{\dot{x}}(\ )h]\,dt = 0 \qquad \forall h \in X$$

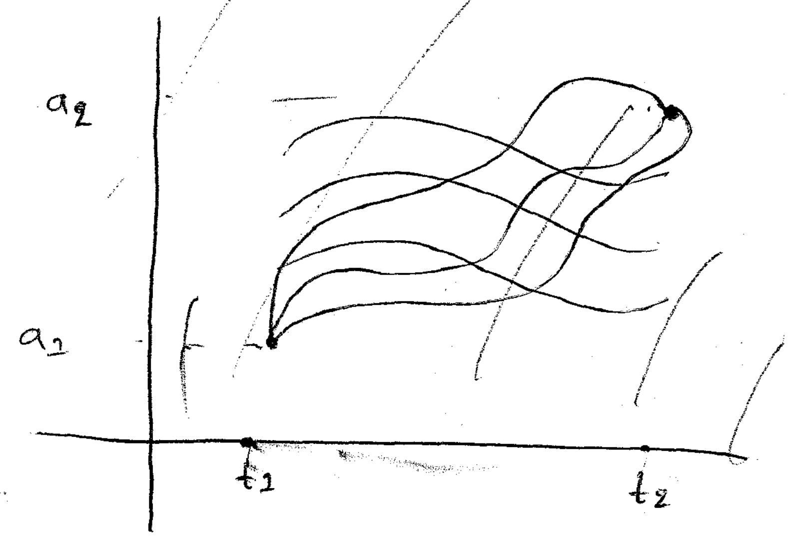
$\Longrightarrow$

δηλαδή

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(\,) - \frac{d}{dt} f_{\dot x}(\,) \right] h \, dt$$

$$+ \quad f_{\dot x}(x(t_2), \dot x(t_2), t_2) h(t_2) - f_{\dot x}(x(t_1), \dot x(t_1), t_1) h(t_1) = 0 \quad (3)$$

~~Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο~~ $\cancel{X = \{x = x(t) \in [t_1, t_2], \mathbb{R}^n}$
~~$: x(t_1) = a_1, \; x(t_2) = a_2$ με $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ δοσμένα$\} \subset X$~~



Επιλέγω τις ~~περάσεις κινήσεις με σταθερά άκρα~~

Και έστω $H = \{h \in X$ με $h(t_1) = h(t_2) = 0\}$ και στη συνέχεια εφαρμόσουμε την (3) θέτοντας $h \in H$

Τότε (3) $\Rightarrow$
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(\,) - \frac{d}{dt} f_{\dot x}(\,) \right] h \, dt = 0 \quad \forall h \in H$$

άρα $\left[f_x(\,) - \frac{d}{dt} f_{\dot x}(\,) \right] h \, dt = 0$ από στοιχειώδη λήμμα του λογισμού των μεταβολών.

Βασικό Λήμμα

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,\xi(t)\,dt = 0 \quad , \forall \xi \in C_1^0[t_1,t_2] \quad \text{με} \quad \xi_1(t_1) = 0 = \xi_2(t_2)$$

Τότε ισχύει: $A(\cdot) = 0$ στο $[t_1, t_2]$

Προκύπτει επομένως ότι $\forall\ t \in [t_1, t_2]$

$$f_x(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)$$

↑

Εξίσωση Euler-Lagrange.

~~Ένα άλλο Πρόβλημα Παρτούσι αναζητήσεως:~~

~~$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\,dt \to \min$~~

~~$\bar{X} = \{ x \in X : x(t_1) = a_1, \ x(t_2) = a_2$ όπου a_1, a_2 δοσμένα$\}$~~

~~Εάν ο $\bar{X}$ είναι γραμμικός, από το προηγούμενο σχήμα~~

~~Αναγκαίες συνθήκες παράγωγοι διαδικασία.~~

~~$0 = \delta J(x, h) = \dots$~~

~~συνέχεια στο πάνω~~

↳ όπου η βάση με H

Επανερχόμαστε στην αναγκαία συνθήκη (3)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(\;) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(\;) \right] h \, dt$$

$$+ \; f_{\dot{x}}(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2)\, h(t_2) - f_{\dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1)\, h(t_1)$$

$$\forall h \in X$$

απο $E-L$ το $\int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(\;) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(\;) \right] h \, dt = 0$

αρα

$$f_{\dot{x}}(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2)\, h(t_2) - f_{\dot{x}}(\;)\, h(t_1) = 0$$

αναγκαστικά

$$f_{\dot{x}}(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2) = f_{\dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1)\, h(t_1)$$

$$= 0$$

<u>Παρόμοιο πρόβλημα</u>

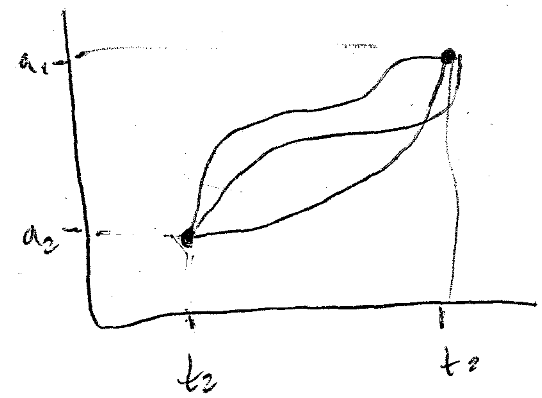
$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(\;)\, dt \;\rightarrow\; \min$$

όπου $\overline{X} = \{ x = x(t) \in C^1[t_1, t_2]$ με $x(t_1) = a_1$ και $x(t_2) = a_2 \}$

ίδια διαδικασία $\Rightarrow$

$$\delta T(x,h) = \int_{t_1}^{t_2} \left(f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \right) dt$$

$$+ \; f_{\dot{x}}(\;) h \big|_{t_2} - f_{\dot{x}}(\;) h \big|_{t_1} = 0 \quad \forall h$$



$$T(x) \le T(x+\varepsilon h) \quad \forall \varepsilon>0, \quad h\in H$$

$$X, \quad x(t_1)=a_1, \quad x(t_2)=a_2$$

γιατί $\quad x(t_1)+\varepsilon h(t_1)=a_1$ άρα $h(t_1)=0$

$\quad x(t_2)+\varepsilon h(t_2)=a_2 \Rightarrow h(t_2)=0$

Σε αυτή τη περίπτωση προκύπτει αμέσως από τη συνθήκη

$$0=\underset{\forall h\in H}{\delta T(x,h)} = \int_{t_1}^{t_2}\left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot x}\right)h(t)\,dt$$

άρα προκύπτει $E-L$

(Προσοχή προκύπτει μόνο $E-L$ και όχι όπως πριν)

<u>Άσκηση</u> Πορίσματα απαραίτητα για τα εξής:

$$T(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(x,\dot x,t)\,dt \to \min$$

- $X=\{x\in X$ με $x(t_1)=a_1\in\mathbb{R}^n\}$ (i)
- $X=\{x\in X$ με $x(t_2)=a_2\in\mathbb{R}^n\}$ (ii)

(i) E-L + 1 συνθήκη $f_{\dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1) = 0$

(ii) E-L + 2 συνθήκη $f_{\dot{x}}(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2) = 0$

Παράδειγμα

$$T = \int_1^2 \dot{x}^2 \cdot t \, dt \to \min$$

(1) Άκρα ελεύθερα

(2) Άκρο $x(t_2)$ ελεύθερο ενώ $x(t_2) = 5$

(1) E-L, $f = \dot{x}^2 \cdot t$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right) \quad \forall t \in (1, 2) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2t\dot{x}(t)) \quad \cancel{\dot{x}(t) = 0} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\dot{x}(t) \cdot t = C \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{C}{t} \xRightarrow{\int_1^t}$$

$$x(t) - x(1) = C \log t$$

$$[x(t) = x(1) + C \log t] \quad (1)$$

$f_{\dot{x}}(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2) = 0$ δηλ. $2t_2\dot{x}(t_2) = 0$ (2)

$f_{\dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1) = 0$ δηλ. $2t_1\dot{x}(t_1) = 0$ (3)

Ισοδύναμα από (Ι),(ε)(3) $c=0$ επομένως

$x(t) = x(1) = \text{constant}$

(g) Περιστατικό

$E\text{-}L \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\ ) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\ )\right) \quad \forall t \in (1,e)$

$x(t) = x_2 + c\log t$

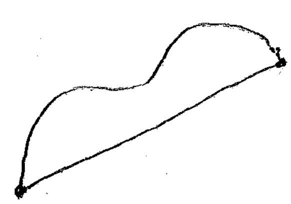
Αφού x_1 ελεύθερο άρα $2t_1\dot{x}(t_1) = 0 \Rightarrow c = 0$

και $x(t_e) = 5$

άρα $\boxed{x(t) = 5}$

Παράδειγμα

έχω δύο σημεία



Ψάχνουμε την C με ελάχιστο μήκος.

Ισχυρισμός

ότι η καμπύλη είναι της μορφής

$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \quad t \in [t_1, t_2]$

μήκος

άρα $\rightarrow \ell = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{X}(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt$

$$f(x,\dot x,t) = \sqrt{\dot x_1^2 + \dot x_2^2}$$

αφού έχουμε σταθερά άκρα μόνο E–L

$x(t_1) = a$

$x(t_2) = b$

$\cancel{f_x = 0}$, $f_x = 0$

Άρα $f_{\dot x} = \left(\dfrac{\dot x_1}{\sqrt{\dot x_1^2 + \dot x_2^2}}, \dfrac{\dot x_2}{\sqrt{\dot x_1^2 + \dot x_2^2}} \right)$

άρα $\dfrac{d}{dt} f_{\dot x}(\,) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$ δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x_1}{\sqrt{\cdot}}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x_2}{\sqrt{(\cdot)}}\right) = 0$$

$\iff \forall t \in [t_1, t_2]$

$$\left\{ \dot x_1 = c_1 \sqrt{\cdot} \quad \text{και} \quad \dot x_2 = c_2 \sqrt{\cdot} \right\}$$

~~για κάποιο c $\Rightarrow$ $\dot x_1 = c\,\dot x_2$ $\forall t \in [t_1, t_2]$~~

$\Rightarrow$ ~~$x_1 = c\,x_2(t) + \mu$ c, μ σταθερές $\forall t \in [t_1, t_2]$~~

$$\Rightarrow \quad \dot X(t) = \|X(t)\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

άρα η μοναδική υποψήφια είναι η **ευθεία** και οι σταθερές από τα **άκρα**.

Ικανές συνθήκες:

Έστω $x \in X = \{x = x(t) \in C^1[t_1, t_2],\ x(t_1),\ x(t_2)\ \text{fixed}\}$

τέτοιο ώστε η T παίρνει min στο x, δηλ $T(x) \le T(y)$

$\forall \|y - x\|$ κοντά στο μηδέν. ή το ίδιο $T(x) \le T(x + \varepsilon h)$, $\Leftrightarrow$

$\varphi(\varepsilon) = T(x + \varepsilon h) - T(x) \ge 0$ $\forall \varepsilon$ κοντά στο 0. και $\boxed{\varphi(0) = 0}$

Αναγκαστικά $\varphi^{(1)}(0) = 0$, $\varphi^{(2)}(0) \ge 0$ $= \delta T(\hat{x}, h) = \int_{t_1}^{t_2} (f_x h + f_{\dot{x}} \dot{h})\, dt = 0$ $(\forall h)$

1 ικανή συνθήκη

Θεωρούμε $\varphi(\varepsilon) = T(x + \varepsilon h) - T(x)$

Αναπτ. με Taylor

$$\varphi(\varepsilon) = \underbrace{\varphi(0)}_{0} + \varepsilon \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \varphi^{(2)}(\theta \varepsilon), \quad 0 < |\theta| < 1$$

$; \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} \varphi(\theta\varepsilon)$

$$\varphi(\varepsilon) = T(x + \varepsilon h) - T(x) = \int_{t_1}^{t_2} (f(x + \varepsilon h, \dot{x} + \varepsilon \dot{h}, t))\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\, dt$$

να τονίσω

$$\varphi^{(1)}(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left(f_x (x + \varepsilon h, \dot{x} + \varepsilon \dot{h}, t) h + f_{\dot{x}}(\cdot) \dot{h} \right) dt$$

$$\varphi^{(2)}(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} h^T f_{xx}(\cdot) h + (\dot{h})^T f_{\dot{x}\dot{x}}(\cdot) \dot{h} + \dot{h}^T f_{x\dot{x}}(\cdot) h$$

$$+ h^T f_{\dot{x}x}(\cdot) \dot{h}$$

(12)

$$= \int_{t_1}^{t_2} (h^T \,|\, \dot{h}^T) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \dot{h} \end{pmatrix} dt > 0$$

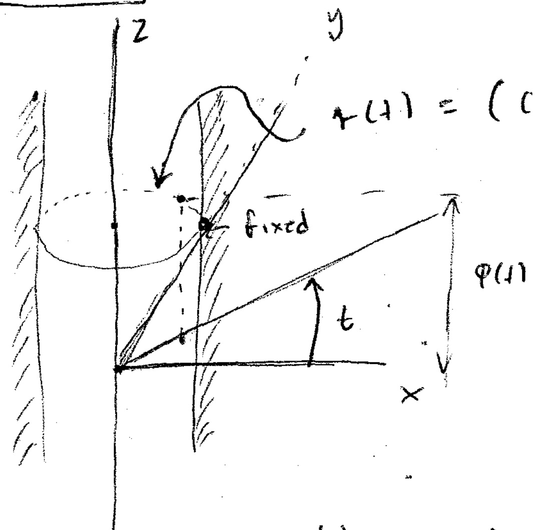
$\forall$ ε κοντά στο 0

άρα πρέπει ο 2×2 να είναι θετικά ορισμένος.

Άρα αν $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} \Big|_{(x,\dot{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]} \geq 0 \Rightarrow$ Τότε το $x = x(t)$

η Τ παίρνει ελάχιστο.

Άσκηση



$r(t) = (\cos t, \sin t, \varphi(t))$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Από όλες αυτές τις υποψήφιες καμπύλες πρέπει να βρούμε εκείνη που το $\varphi(t)$: έχει ελάχιστο μήκος.

Πρέπει να βρω σταθερή $\varphi(t)$

Ξέρω ότι $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \text{const.}$

Το μήκος της ανω: Σταθερή άκρα άρα $\boxed{E-L}$ μόνο

$$T(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\overset{\text{μήκος}}{\dot{r}(t)}|\,dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}}_{f(\varphi,\dot{\varphi},t)}\,dt \to \min$$

δλδ πρέπει $f_{\dot{\varphi}}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),t) = \text{const}, \ \forall t \in [0, 2\pi]$

Διαφ. ερήμ. μορφή (τ' έχουμε)

$$f_{\dot{\varphi}}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}} = \text{const}, \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

Αλλα $\varphi(0) = \varphi(2\pi) \to \exists\, \xi \in (0, 2\pi) : \varphi^{(1)}(\xi) = 0 \quad (2)$

Άρα θέτοντας $t=\xi$ στην (1) προκύπτει

$$\frac{\dot{\varphi}(\xi)}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(\xi)}} = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \text{const} = 0$$

Άρα $\dfrac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\cdot}} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ άρα $\boxed{\varphi(t) = \text{const}}$

↑ αναγκαία συνθήκη

Πάμε για ικανή $\quad f_{\dot{\varphi}} = \dfrac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}}, \quad f_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} = \dfrac{1+\cancel{\dot{\varphi}^2}-\cancel{\dot{\varphi}^2}}{(1+\dot{\varphi}^2)^{3/2}}$

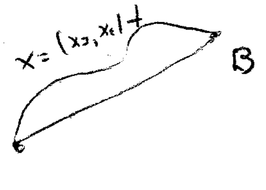
$$\begin{pmatrix} f_{\varphi\varphi} & f_{\dot{\varphi}\varphi} \\ f_{\varphi\dot{\varphi}} & f_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1+\dot{\varphi}^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \geq 0$$

$\forall$ μεταβλητή $\dot{\varphi} \in \mathbb{R}$

$\forall x$ διάνυσμα του πίνακα

Θετικά ημιορισμένος αν $x' A x \geq 0$

Ασκηση (έχει ξαναγίνει)



$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt \to \min$$

Ικανές συνθήκες τώρα για το ολοκλήρωμα!

$$f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} f_{xx} & f_{\dot{x}x} \\ \hline f_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{array}\right) = \cdots =$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 0 & \frac{\dot{x}_1^2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{2/3}} & \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{(\ \cdot\ )^{2/3}} \\ & \frac{\dot{x}_2 \dot{x}_1}{(\ \cdot\ )^{2/3}} & \frac{\dot{x}_2^2}{(\ \cdot\ )^{2/3}} \end{array}\right)$$

Για να είναι ο πίνακας θετικά ημιορισμένος θέλουμε κριτήριο **Sylvestre** Δες wiki.

← εδώ πίνακας μη θετικά και δεν βγαίνει με sylvestre

εδώ βγαίνει ≥ 0 μόνο για έναν 2×2 πίνακα lol. αν ισχύουν

$\Delta_1 > 0$ και $\Delta_2 \geq 0$ ή $\Delta_1 \geq 0$ και $\Delta_2 > 0$ τότε ο

πίνακας Α είναι θετικά ημιορισμένος.

Άσκηση

$$T(x,y) = \int_0^1 (x^2 + xy + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,dt \longrightarrow \min$$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0,1]$ $\left\{ \begin{array}{l} x(0)=0,\ y(0)=0 \\ x(1)=1,\ y(1)=2 \end{array} \right)$

fixed άκρα άρα μόνο $\boxed{E-L}$

$$f = x^2 + xy + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$f_{(x,y)} = (2x+y,\ 2y+x)$, $f(\dot{x},\dot{y}) = (2\dot{x},\ 2\dot{y})$ $\Big\} \overset{EL}{\Longrightarrow}$

$$\frac{d}{dt}\left[f(\dot{x},\dot{y}) \Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} \right] = f(x,y) \Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} \quad \forall t \in (0,1)$$

Ισοδύναμα

$$(2\ddot{x},\ 2\ddot{y}) = (2x+y,\ 2y+x)$$

Ισοδύναμα $\left. \begin{array}{l} 2\ddot{x} = 2x+y \\ 2\ddot{y} = 2y+x \end{array} \right\}$ + συνοριακές

και τώρα έτσι όπως είναι πάμε Laplace

$$s^2 X(s) - s\cancel{X(0)}^{0} - \dot{X}(0)^{a} = X(s) + \tfrac{1}{2} Y(s)$$

και

$$s^2 Y(s) - s\cancel{Y(0)}^{0} - \dot{Y}(0)^{B} = Y(s) + \tfrac{1}{2} X(s) \quad \Big\} \iff$$

Ισοδύναμα

$$\left.\begin{aligned}(s^2-1)\,X(s) &= \tfrac{1}{2}Y + a\\ (s^2-1)\,Y(s) &= \tfrac{1}{2}X + B\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Πράξεις ....

$$Y = \frac{1}{4}\,\frac{a + 2B(s^2-1)}{\cancel{2(s^2-1)}} \cdot \frac{2(\cancel{s^2-1})}{(s^2-1)^2-\frac{1}{4}}$$

αριθμητής βαθμός 2 4

$$= \frac{*}{(s^2-\frac{3}{2})(s^2-\frac{1}{2})} = \ldots \text{, ανάλυση κλασμάτων} =$$

$$= \frac{A_1}{s-\sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{A_2}{s+\sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{B_1}{s-\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{B_2}{s+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

ομοίως $X(s) = \ldots$

άρα $x(t) = L^{-1}(X(s))$ και $y(t) = L^{-1}(Y(s))$

Μετά προσδιορίζουμε τα a, B από τις συνοριακές συνθήκες.

Για να είναι ελάχιστο μετά ~~το~~ ~~λόγος~~

$$f = x^2 + xy + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

ικανή συνθήκη.

$\cancel{f_{(x,y)}}$ $\cancel{f_{(\dot{x},\dot{x})}}$ $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} f_{xx} & f_{xy} & f_{x\dot{x}} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{y\dot{x}} & f_{yy} \\ \hline f_{x\dot{x}} & f_{x\dot{y}} & f_{\dot{x}\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{y}} \\ f_{y\dot{x}} & f_{y\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{x}} & f_{\dot{y}\dot{y}} \end{array}\right) \geq 0$$

θετικά ημιορισμένος

Άσκηση για το σπίτι

$$\int_0^1 (x^2 + xy + \dot{y}^2 + 2\dot{x}t)\,dt \to \min$$

Σ.Σ. $x(0) = 1$, $x(1) = 2$

$y(0) = 0$, $y(1) = -2$

Είχαμε πει για $T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\,dt$

είχαμε πει $\delta T(x,h) = \int_{t_1}^{t_2} (f_x h + f_{\dot{x}} \dot{h})\,dt$

(1) $h = \to \delta T(x,h)$ είναι γραμμική.

δηλ $\delta T(x, k h_1 + l h_2) = k\,\delta T(x, h_1) + l\,\delta T(x, h_2)$

και (2) $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{T(x + \alpha(\varepsilon)h_1 + \beta(\varepsilon)h_2) - T(x)}{\varepsilon} = \alpha'(0)\,\delta T(x,h_1) + \beta'(0)\,\delta T(x,h_2)$

για α, β παραγωγίσιμες.

(3) Αν $t \to |f_x(x(t), \dot{x}(t), t)| + |f_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)| \neq 0$ στο $[t_1, t_2]$ τότε $\exists\ h = h(t)$, $t \in [t_1, t_2]$,

$$0 \neq \delta T(x, h) = \int_{t_1}^{t_2} (f_x(\cdot) h + f_{\dot{x}}(\cdot) \dot{h}) dt$$

(4) Αν $a(\varepsilon, \varphi) = T(x + \varepsilon h + \varphi y)$, $(\varepsilon, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \varepsilon}\right|_{(0,0)} = \delta T(x, h), \quad \left.\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right|_{(0,0)} = \delta T(x, y)$$

Οι παραπάνω είναι αναγκαίες συνθήκες για ακρότατα με περιορισμούς.

Π.Χ $T(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, t)\, dt \to \min$

από όλα αυτά τα x του Μ.Χ δεδομένου

ότι $G(x) = \int_{t_1}^{t_2} g(x, \dot{x}, t)\, dt = C$

για τη συνέχεια χάριν βλάβης γενικότητας $\boxed{C \neq 0}$:

και έχουμε

$$\hat{G}(x) = \int_{t_2}^{t_2} \left(g(x,\dot{x},t) = \frac{c}{t_2 - t_2} \right) dt = 0$$

Athans – Falb ← Φενvó κλη.
optimal Control
Dover

Άσκηση

$$T(x) = \int_1^2 (x_2^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\,dt \to \min$$

- $x(1) = (x_1(1),\ x_2(1)) = (1,1)$
  $x(2) = (x_1(2),\ x_2(2)) = (2,3)$

- $x(1) = \dots = (1,1)$
  $x(2) =$ ελεύθερο

~~Άσκηση~~ EL

$$\left.\begin{aligned} f_x &= (2x_1, 0) \\ f_{\dot{x}} &= (2\dot{x}_1, 2\dot{x}_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall t \in [1,2] \text{ ισχύει}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\ddot{x}_1 &= 2x_1 \\ 2\ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1 \\ \ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x_1(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$

και

$x_2(t) = Kt + L$

→ 1η συνοριακές. OK

→ 2η συνοριακές και $f_{\dot{x}}(\ )\big|_{t=2} =$

$= (2\dot{x}_1(2), 2\dot{x}_2(2)) = 0 \Rightarrow$

$\dot{x}_1(2) = 0$ και $\dot{x}_2(2) = 0$

* Προσοχή μπορεί να μην βγαίνουν και επίσης δεν σημαίνει ότι η λύση θα είναι και μοναδική.

Ικανές συνθήκες

$f_{\dot{x}} = (2\dot{x}_1, 2\dot{x}_2)$

$f_x = (2x_1, 0)$, $f_{x\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f_{xx} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \geq 0 \leftarrow \text{ημιθετικά ορισμένος}$$

Τότε ισχύει η λύση. (Ικανή λύση κτλ)

Ακρότατα με περιορισμούς

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\,dt \to \min \quad (1a) \qquad G(x) = \int_{t_1}^{t_2} g(x, \dot{x}, t)\,dt = C \mid \text{δοσμένο}$$

ή, $C = 0$ (1b)

$f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$

Αναγκαίες συνθήκες

Υποθέτουμε ότι $\forall\ x(\cdot) \in C_1^1[t_1, t_2]$

Έστω ότι υπάρχει ένα $x = x(\cdot) \in C^1[t_1, t_2]$ που επιλύει το (1a) + (1b) και επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$t \to |g_x(x(t), \dot{x}(t), t)| + |g_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)| \neq 0 \quad (2)$$

$t \in [t_1, t_2]$

η οποία βάση της ιδιότητας σημαίνει ότι υπάρχει $y = y(t) \in C^1[t_1, t_2]$ έτσι ώστε $\delta G(x, y) \neq 0$ (3)

Τότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$: x είναι στατικό σημείο για το

$$\hat{T} \overset{\text{ορ.}}{=} T + \lambda G \quad (4) \quad \delta\lambda\delta \qquad \delta \hat{T}(x, h) = 0 \quad \forall h \quad (5)$$

η οποία λόγω (4) $\Rightarrow$ $\delta T(x, h) + \lambda \delta G(x, h) = 0\ \forall h$,

ισοδύναμα

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_x h + f_{\dot{x}} \dot{h})\, dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} (g_x h + g_{\dot{x}} \dot{h})\, dt = 0$$

ισοδύναμα

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_x h + f_{\dot{x}} \dot{h}) + \lambda (g_x h + g_{\dot{x}} \dot{h})\, dt = 0 \quad \forall h$$

ή

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_x h + \lambda g_x h) + (f_{\dot{x}} \dot{h} + \lambda g_{\dot{x}} \dot{h})\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}} + \lambda g_{\dot{x}}\right) = (f_x + \lambda g_x) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Ουσιαστικά: Θέλουμε να βρούμε λ κατάλληλο έτσι ώστε $\hat{T} = T + \lambda G$

Η απόδειξη στηρίζεται στο ακόλουθο λήμμα

Λήμμα: $\forall h$ με $\delta G(x,h)=0 \Rightarrow \delta T(x,h)=0$

Δείχνουμε ότι: πράγματι υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\delta \hat{T}(x,h)=0 \quad \forall h \,, \quad \hat{T} = T + \lambda G$$

Χρησιμοποιώ λήμμα:

Παρατηρώ ότι λόγω (1) ιδιότητα η απεικόνιση

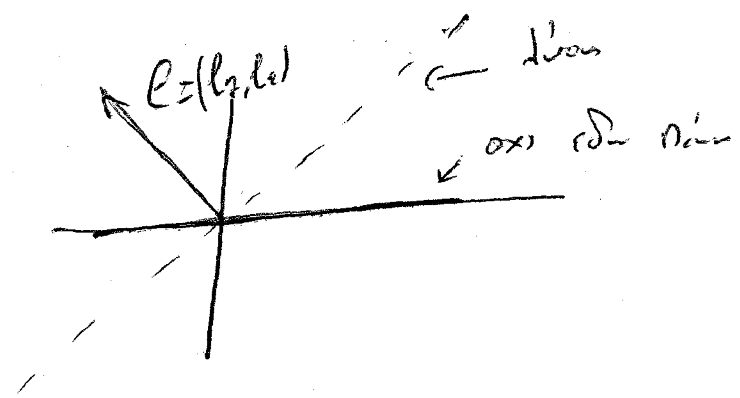
$$h \longrightarrow \Phi(h) \overset{op}{=} \begin{pmatrix} \delta T(x,h) \\ \delta G(x,h) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$ είναι γραμμική

$\delta\lambda\delta$ $\Phi G \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι το $(1,0)$ δεν περιέχεται στο $\operatorname{Im}\Phi$ γιατί αλλιώς θα ήταν

$\delta T(x,h)=1$ και $\delta G(x,h)=0$ για κάποιο h. Όμως λόγω λήμματος αδύνατο γιατί $\delta G(x,h)=0 \rightarrow \delta T(x,h)=0$

ΑΤΟΠΟ

Συμπέρασμα $Im\Phi < \mathbb{R}^2$



Προσοχή $Im\Phi \neq 0$ γιατί $\delta T(x,h)=0$, $\delta G(x,h)=0$ στο οποίο και από άνω υπόθεση με ότι $\exists y$ με $\delta G(x,y)\neq 0$

Η λύση θα έχει ένα διάνυσμα $(\ell_1,\ell_2)\perp Im\Phi$ με $\ell_1\neq 0$ άρα

$$\ell_1 \delta T(x,h) + \ell_2 \delta G(x,h) = 0 \quad \forall h$$

$$\Rightarrow \quad \delta \hat{T}(x,h)=0, \forall h \quad \checkmark$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ λήμματος.</u>

χρησιμοποιώ <u>Ιδιότητες</u>

Έστω $x(\cdot)$ στο οποίο η T παίρνει ελάχιστο δηλ. $T(x)\le T(w)$ $\forall w$ κοντά στο x (1) και έτσι ώστε ικανοποιείται ο περιορισμός,

$$G(x)=0, \quad G(w)=0 \quad (2).$$

Με βάση την υπόθεση του θεωρήματος υπάρχει $y(\cdot)\neq 0$ έτσι ώστε $\delta G(x,y)\neq 0$ (3). Έστω τώρα h τέτοιο ώστε $\delta G(x,h)=0$ (4)

<u>Ισχυρισμός 1</u> Δείχνουμε ότι υπάρχει $\varphi\in C^1$, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi(0)=0$

: $\boxed{G(x+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y)=0}$ (5)

$\forall \varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν. (8)

Ισχυρισμός 2

Η προηγούμενη $\varphi(\cdot)$ που πληροί την (5) ικανοποιεί την ιδιότητα $\varphi(0) \overset{(3)}{=} 0$ (6)

Απόδειξη του Ισχυρισμού (1)

Ορίσουμε $a(\varepsilon,\varphi) \overset{op}{=} G(x+\varepsilon h+\varphi y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (7)

$$a(0,0) = G(x+0+0) = G(x) = 0 \quad (8a)$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right|_{(0,0)} \overset{\text{ιδιότητα 4}}{=} \delta G(x,y) \overset{(3)}{\neq} 0 \quad (8\beta)$$

Από (1),(2),(5) έπεται $T(x) \leq T(x+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y)$ $\forall$ κοντά στο 0 ή η πραγματική συνάρτηση $\xi(\varepsilon) = T(x+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y) - T(x)$ παίρνει ελάχιστο στο 0, $\xi(\varepsilon) \geq \xi(0) = 0$

Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης

λόγω (8a,b) λόγω Θεώρημα Πεπλεγμ. υπάρχει $\left\{\begin{array}{l}\varphi = \varphi(\varepsilon) \in C^1 \\ \varphi(0) = 0\end{array}\right\}$ (9)

και τέτοια ώστε $a(\varepsilon, \varphi(\varepsilon)) = 0$ (10) ε κοντά στο μηδέν

(7) + (10) $\Rightarrow$

Από $G(x+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y) = 0$ Ισχυρισμός (1)

Άρα $\xi'(0) = 0$

Άρα $\xi'(0) = \delta T(x,h) + \delta T(x,y)\varphi'(0)$ (6)

Άρα $\delta T(x,h) = 0$

Τέλος

Απόδειξη ισχυρισμού 2

Ανάπτυγμα Taylor της $a(\cdot,\cdot)$ γύρω από το $0 \in \mathbb{R}^2$. $a(\varepsilon,\varphi) = a(0,0) + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon}(0,0)\varepsilon + \frac{\partial a}{\partial \varphi}(0,0)\varphi + O(\varepsilon,\varphi)$. $\underset{\varphi(\varepsilon)\to 0}{\overset{\varphi=\varphi(\varepsilon)}{\Longrightarrow}}$ $a(\varepsilon,\varphi(\varepsilon)) = a(0,0) + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon}(0,0)\varepsilon + \frac{\partial a}{\partial \varphi}(0,0)\varphi(\varepsilon) + O(\varepsilon,\varphi(\varepsilon))$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} 0 = \delta G(x,h)\varepsilon + \delta G(x,y)\varphi(\varepsilon) + O(\varepsilon,\varphi(\varepsilon)) \overset{\text{διαιρώ με } \varepsilon}{\Longrightarrow}$$

~~Σχέση (3)~~

$$\Rightarrow 0 = \underset{\overset{\|}{0}}{\underset{(4)}{\delta G(x,h)}} + \delta G(x,y)\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{O(\varepsilon,\varphi(\varepsilon))}{\varepsilon} \Rightarrow 0 = \delta G(x,y)\cdot\varphi'(0) \Rightarrow \boxed{\varphi'(0)=0}$$

Άσκηση

$$\int_0^1 (\underbrace{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2}_{F})\, dt \to \min$$

$$\int_0^1 \underbrace{t^2}_{g} x_1 \, dt = 0 \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 0, & x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 1, & x_2(1) = 1 \end{matrix}$$

Αναγκαία συνθήκη: Θεωρούμε $\mathcal{F} = F + \lambda g \overset{E-L}{\Longrightarrow}$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2 + \lambda t^2 x_1$$

$$F_x = (\lambda t^2, 1), \quad F_{\dot{x}} = (2\dot{x}_1, 2\dot{x}_2) \overset{EL}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 2\ddot{x}_1 = \lambda t^2 \\ 2\ddot{x}_2 = 1 \end{matrix}\right\} \overset{\int_0^t}{\Longrightarrow} \dot{x}_1 = \dot{x}_1(0) + \frac{\lambda}{6} t^3 \overset{\int_0^t}{\Longrightarrow}$$

$$x_1 = \overset{0}{\cancel{x_1(0)}} + \dot{x}_1(0) t + \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{t^4}{4}$$

και $$x_2 = \overset{0}{\cancel{x_2(0)}} + \dot{x}_2(0) t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 = \dot{x}_1(0) + \frac{\lambda}{24} \quad (1) \\ 1 = \dot{x}_2(0) + \frac{1}{4} \quad (2) \end{matrix}\right\}$$ .. πως θα βρω το λ;

Περιορισμός $$\int_0^1 t^2 \left(\dot{x}_1(0) t + \frac{\lambda}{6} \frac{t^4}{4}\right) dt = 0 \quad (3) \Rightarrow$$

(1), (2), (3) βρίσκω x_2, x_1, λ (Προσοχή αν $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$

Ικανές συνθήκες

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) > 0$$

Προσοχή στην συνάρτηση που το λ περιέχεται εδώ!!!

Το συμπέρασμα είναι ότι:

$\Leftrightarrow \quad \hat{T}(x) \leq \hat{T}(y) \quad \forall y$ κοντά στο X όπως

$$T(x) + \lambda \overset{=0}{G(x)} \leq \hat{T}(y) = T(y) + \lambda \cancel{\overset{=0}{G(y)}} \quad \forall y \text{ κοντά στο } X$$

από συνθήκη άρα $T(x) \leq T(y) \quad \forall y$ κοντά στο X

gg/✓

$$\int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)dt \to \min$$

$$\int_0^1 \underbrace{tx\,dt}_{G} = c(\text{constant}) \qquad x(0)=1, \quad x(1)=2 \text{ ή ελεύθερο}$$

$$\hat{J} = J + \lambda G = \int_0^1 \underbrace{(x^2 + \dot{x}^2 + \lambda t x)}_{F} dt$$

$$F_x = 2x + \lambda t, \quad F_{\dot{x}} = 2\dot{x} \overset{E-L}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 2\ddot{x} = F_x = 2x + 2\lambda t$$

$$\ddot{x} = x + \frac{\lambda}{2} t \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} s^2 X = s\,x(0) - x^{(1)}(0) = X + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{s^2}$$

$$s^2 X - s - \rho = X + \frac{\rho}{s^2} \Rightarrow \quad X = \frac{s^3 + \rho s^2 + \lambda}{(s^2-1)s^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

$$C = \frac{1+\rho+\lambda}{2}, \quad A = 0, \quad D = \frac{-1+\rho+\lambda}{-2}, \quad B = -\ell$$

Άρα $x(t) = L^{-1} X(s) = L^{-1}\left(-\frac{\lambda}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}\right) = -\frac{1}{2}t + Ce^t + De^{-t}$

$$C = C(\rho,\lambda), \quad D = D(\rho,\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} &x(1) = 2 \\ &\int_0^t t\,x(t) = \text{const} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ldots$$

Αν το δεύτερο άκρο ελεύθερο

έχω

$$\int_0^1 t\,x(t)\,dt = \text{const}$$

και $F_{\dot{x}}(x(1), \dot{x}(1), 1) = 0$

Ικανές

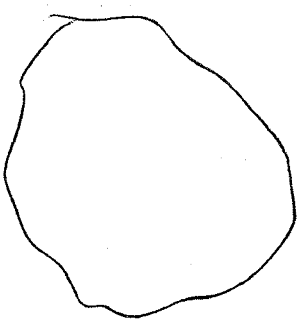
$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

$\hat{T}(x) \leq \hat{T}(w)$ $\forall w$ κοντά στο X.

όμως $T(x) + \lambda G(x) = T(w) + \lambda G(w) \Rightarrow$

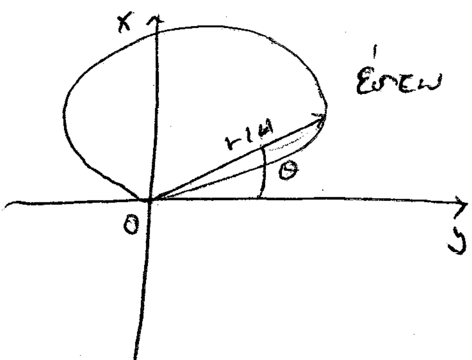
$T(x) \leq T(w)$ $\forall w$ με $G(w) = \text{const}$.

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα



μήκος L_0 (δοσμένο)

Βρες καμπύλη με το μέγιστο εμβαδόν.



Έστω $r(0) = r(\pi) = 0$

$\vec{r}(\theta)$

$\parallel$

$(x, y) = (r(\theta)\sin\theta,\ r(\theta)\cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\text{εμβαδό} = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \det\begin{pmatrix} r\cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} d\theta\, dr = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{r(\theta)} r\, dr \right) d\theta =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2(\theta)\, d\theta}_{T(r)}$$

Για περιοριστικό έχουμε το Μήκος $= \int_0^\pi \left|\frac{d}{d\theta} R(\theta)\right| d\theta = \underbrace{\int_0^\pi \left[(r^{(1)}(\theta))^2 + r^2(\theta)\right] d\theta}_{G(r)}$

$$\hat{T} = T + \lambda G = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} r^2 + \lambda (\dot{r}^2 + r^2)^{1/2} \right) dt$$

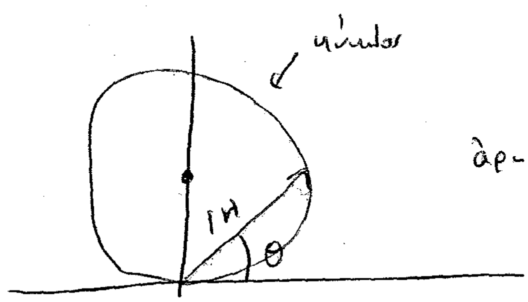
E-L $\quad \frac{d}{dt} F_{\dot r} = F_r \overset{\text{Αυτόνομο}}{\Rightarrow} -\dot{r}\lambda \frac{\dot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} r^2 + \lambda (\dot{r}^2 + r^2)^{1/2} = \text{const.}$

$\ldots \Rightarrow$

$$\dot{r}^2 + r^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow \ldots \boxed{r = r(\theta) = -2\lambda \sin\theta}$$
$$\lambda < 0$$

Προσδιορισμός του λ από συνθήκη (6) $\lambda = -\frac{L_0}{2\pi}$

άρα $r(\theta) = \frac{L_0}{\pi} \sin\theta$



άρα η ακτίνα είναι $\frac{L_0}{2\pi}$

Μερικά συμπληρώματα

- Οι αναγκαίες συνθήκες που μελετήσαμε για την περίπτωση του min είναι ίδιες με αυτές της περίπτωσης του max.

ΔΙΔ: $T(x) \to \min \iff -T(x) \to \max$

- <u>Άσκηση</u> Δείχνουμε ότι στην περίπτωση

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt \to \min$$

και η f είναι ανεξάρτητη του t $(f_t \equiv 0)$

Τότε οι εξισώσεις E-L γράφονται $\left.(f - f_{\dot{x}}\dot{x})\right|_{(x(t),\, \dot{x}(t))} = \text{const}$ (*)

$\forall t \in [t_1, t_2]$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Οι εξ. E-L: $f_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$

$\forall t \in [t_1, t_2]$

$$\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}}\dot{x}) = \frac{d}{dt}(f_{\dot{x}})\dot{x} + f_{\dot{x}}\ddot{x} \overset{E-L}{=} f_x \dot{x} + f_{\dot{x}}\ddot{x} \overset{f_t=0}{=}$$

$$= \frac{d}{dt} f(x(t), \dot{x}(t))$$ Άρα επίσης η $\frac{d}{dt}(f - f_{\dot{x}}\dot{x}) = 0 \Rightarrow$

$f - f_{\dot{x}}\dot{x} = \text{const.}$ ✓

Άρα για συμπλήρωση τώρα στο ισοπαρ. πρόβλημα...

$$T(r) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\theta)\,d\theta \rightarrow \min$$

με

$$G(r) = \int_0^{\pi} \left(\dot r(\theta) + r^2(\theta) \right) d\theta = \underset{\sim}{L_0}$$

$$\hat{T} = T + \lambda G \quad , \text{αυρίστο}$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2}r^2 + \lambda \dot r^2 + \lambda (\dot r^2 + r^2)^{1/2} \right)}_{F = F(r, \dot r)} d\theta$$

Εφαρμόσουμε την ☆ από E–L.

Έχουμε $F(r(\theta), \dot r(\theta)) - F_{\dot r}(r(\theta), \dot r(\theta))\dot r(\theta) = \text{const}$

$$\frac{\cancel{-\lambda \dot r^2} + \frac{1}{2}r^2(\dot r^2 + r^2)^{1/2} + \cancel{\lambda \dot r^2} + \lambda r^2}{(\dot r^2 + r^2)^{1/2}} = \text{const} \qquad \overset{r(0)=0}{\Longleftrightarrow}$$

Άρα $\text{const} = 0 \Rightarrow (\dot r^2 + r^2)^{1/2} + 2\lambda = 0 \quad (\Rightarrow \lambda < 0)$

Συνεπάγεται ότι $\dot r^2 + r^2 = 4\lambda^2 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4\lambda - r^2 \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dr} = (4\lambda^2 - r^2)^{-1/2}$$

Άρα $\boxed{\theta(r) = \sin^{-1}\left(\frac{r}{-2\lambda}\right)}$ όπως είχαμε βρει

Το λ από υπορικές και $(\lambda < 0)$

Αν ισχύς $T(x) = \ldots \Rightarrow \min(\max)$

και $G_1(x) = \quad = C_1$

$G_2(x) = \ldots = C_2$

Τότε γράφω $\underbrace{\hat{T} = T + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2}$

στάσιμο σημείο.

Βέλτιστος Έλεγχος

$$\dot{X} = f(x,u) \qquad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Έλεγχος
$u = u(t)$

"Κόστος"

$$J(u) = g(X(T)) + \int_0^T f_0(X(s), u(s))\, ds \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} X(t) = X(t, X_0, u) & , u = u(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

X_0 αρχική συνθήκη

T σταθερό δοσμένο

$u = u(t)$ όλες οι "μετρήσιμες + ουσιωδώς φραγμένες" απεικονίσεις : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$

Maximum – Principle (Αναγκαίες συνθήκες)

$\Longrightarrow$