ΣΕΜΦΕ,Εξέταση στα Δυναμικά Συστήματα, Σεπτέμβριος 2009

Θ1. Δωστε τους ορισμους της Ασυμτωτικης Ευσταθειας (ΑΕ) και της ολικης ΑΕ ενος σημειου ισορροπιας. Δείξτε ότι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το συστημα

$\dot{x} = g(y) - x,\ \dot{y} = -x - g(y)$, όπου $g(y) = \sin^3 y$ κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Lyapunov με $V = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^y g(s)ds$, αλλά δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θ2. Δείξτε ότι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημειο ισορροπιας για το σύστημα $\dot{x} = x^3 + y,\ \dot{y} = yx^2 + x$ εφαρμόζοντας

(a) Την μέθοδο της γραμμικοποίησης

(b) Το θεώρημα Chetaev με $V := x^2 - y^2$

Θ3. Χρησιμοποιώντας την $V = x^2 + y^2$ αποφανθειτε για τον ποιοτικο χαρακτηρισμο του μηδενός για το σύστημα $\dot{x} = y + x(\lambda - x^2 - y^2),\ \dot{y} = -x + y(\lambda - x^2 - y^2)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θ4. Να δοθεί το πεδίο φάσεων των λύσεων του συστήματος

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και να βρεθεί η λύση $(x(t), y(t))$ του $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ με $x(0) = y(0) = 0$.

Θ5. Να προσδιορισθεί ένας θεμελιώδης πίνακας του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\cos t}{2+\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί του αριθμοί.

Θ6. Αποδείξτε την συνεπαγωγή

$$\psi(t) \le c + \int_0^t \mu(s)\psi(s)ds,\ \forall t \ge 0 \Rightarrow \psi(t) \le c\exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right),\ \forall t \ge 0$$

Όπου $\psi, \mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχείς και c θετική σταθερά. Με χρήση της παραπάνω συνεπαγωγής αποδείξτε την μοναδικότητα των λύσεων της $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ με $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κλάσεως C^1.

Θ7. Εξεταστε αν υπαρχουν , πλην του μηδενος ,αλλα σημεια ισορροπιας για το συστημα του Θ2 , και αν είναι δυνατον με την μέθοδο της γραμμικοποίησης να εξαχθει συμπερασμα για για τον ποιοτικο τους χαρακτηρισμο.

ΕΠΙΛΟΓΗ 5 θεματα, διαρκεια 2 ½ h