ΣΕΜΦΕ 6ο, 2009, Ιούλιος, Δυναμικά Συστήματα

Θ1. (α) Να βρεθεί η λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x(0)=1, \ y(0)=2$$

(β) Να σχεδιασθεί το πεδίο φάσεων των λύσεων του

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Θ2. Δίνεται το σύστημα $\dot{x} = \ell x - x^3(1-y^3) - xy^2$, $\dot{y} = -y + x^2 y$. (α) Αν $\ell > 0$, δείξτε με την μεθοδο της γραμμικοποίησης οτι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασταθές. (β) Αν $\ell \leq 0$, δείξτε με χρήση του θεωρήματος Lyapunov και με $V := x^2 + y^2$ οτι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές?

Θ3. (α) Χρησιμοποιώντας την $V := xy$ δείξτε οτι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασταθές για το σύστημα $\dot{x} = -xy^3$, $\dot{y} = y^4 + y^3 x^2$ (β) Χρησιμοποιώντας την $V := x^2 + y^4$ πιστοποιείστε ότι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ευσταθές για το σύστημα $\dot{x} = 2y^3$, $\dot{y} = -x$, αλλά όχι ασυμπτωτικα ευσταθές.

Θ4. Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -y - \sin x$ και να εξετασθεί η ευσταθεια τους μέσω γραμμικοποίησης. Να εξετασθεί αν το σύστημα είναι πλήρες.

Θ5. Εύρεση χαρακτηριστικών αριθμων του

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 4t - 1 & 0 \\ \sin 4t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Θ6. Να βρεθεί ο θεμελιώδης πινακας $\Phi(t, t_0)$, $(\Phi(t_0, t_0) = I)$ του συστήματος $\dot{x} = ty$, $\dot{y} = -y$ και να επιβεβαιωθεί ότι:

$$\Phi(t_2, t_1)\,\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_0} = -\Phi(t, t_0)\,A(t_0)$$

Θ7. Απόδειξη του θεωρήματος Lyapunov για ασυμπτωτικη ευσταθεια.

Θ8. Απόδειξη του θεωρήματος Floquet.

ΕΠΙΛΟΓΗ: 5 θέματα.