

ΟΜΑΔΑ Β

ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση III

Φεβρουάριος 2008

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1ο Α. Για μια καμπύλη με φυσική παράμετρο $r = r(s)$, $s \in I$ δίνεται το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $T(s) = r'(s)$, το πρώτο κάθετο διάνυσμα $N(s)$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B = T \times N$, χρησιμοποιώντας μόνο τους δύο τύπους του Frenet: $T'(s) = k(s)N(s)$ και $B'(s) = -\sigma(s)N$ να αποδείξετε τον τρίτο τύπο: $N'(s) = -k(s)T + \sigma B(s)$. ($k(s), \sigma(s)$ η καμπυλότητα και η στρέψη αντίστοιχα).

Β. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο: $F(x, y) = (3x^2y^2 + ay + 1, 2x^3y + 2)$, $a \in \mathbb{R}$,

1. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $F(x, y)$ στην καμπύλη: $r(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.
2. Να υπολογισθεί η παράμετρος a ώστε το $F(x, y)$ να είναι συντηρητικό, να προσδιορισθεί f ώστε $\nabla f = F$ και στη συνέχεια να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος υπολογίζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με βάση γνωστή πρόταση την οποία να διατυπώσετε και να αποδείξετε.

ΘΕΜΑ 2ο: Α. Δίνεται το χωρίο $\Omega = \{(x, y, z) : 2x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ που περιορίζεται από τις επιφάνειες $S_1 : z = 2x^2 + y^2$ και $S_2 : z = 4$. Να διατυπωθεί και να επαληθευθεί το θεώρημα Gauss για το χωρίο Ω και το διανυσματικό πεδίο: $F(x, y, z) = (x, y, 1)$.

ΘΕΜΑ 3ο Α. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι αρμονική στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0, \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Green για να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy$$

σε κάθε κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων, είναι το ίδιο.

Β. Έστω C μια απλή κλειστή καμπύλη, που φράσσει ένα χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα του Green. Δείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου D που περιβάλλεται από τη $C = \partial D$ είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτόν, υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(Δίνεται η παραμετρικοποίησή της: $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$.)

ΘΕΜΑ 4ο Α. Υπολογίστε το $\iint_D x dx dy$ όπου D είναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τις ευθείες:

$$2x+y=4, \quad 2x+y=7, \quad x+y=1, \quad x+y=2.$$

Β. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, (θεωρήστε το χωρίο από κανονικό ως προς y , κανονικό ως προς x .) υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{a^2-x^2} \sqrt{a^2-y^2} dy dx.$$