

**Κβαντομηχανική II: Κανονική Εξέταση**  
**Φλεβάρης 2016**  
**Κλειστά βιβλία και κινητά τηλέφωνα**  
**Γράψτε και τα τέσσερα ισοδύναμα θέματα.**

**Θέμα 1 (α)** Αποδείξτε ότι η χρονική παράγωγος της αναμενόμενης τιμής ενός φυσικού μεγέθους  $A$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d \langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \text{ κλπ}).$$

(β) Έστω ότι η Χαμιλτονιανή κάποιου μονοδιάστατου συστήματος είναι η

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + ma\hat{x} + b.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις που διέπουν τις αναμενόμενες τιμές των  $x$  και  $p$ .

(γ) Να λύσετε τις ανωτέρω εξισώσεις, αν  $\langle \hat{x} \rangle|_{t=0} = x_0$ ,  $\langle \hat{p} \rangle|_{t=0} = p_0$  όπου τα  $x_0$  και  $p_0$  είναι αριθμητικές σταθερές.

**Θέμα 2** Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  χωρίς σπιν κινείται ελεύθερα στο χώρο ανάμεσα σε δύο αδιαπέραστες σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες  $r = a$  και  $r = b$  ( $b > a$ ).

(α) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες. Ποιός είναι ο όρος της στροφορμής;

(β) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές ενέργειας του σωματιδίου και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για (τροχιακή) στροφορμή  $l$  ίση με το μηδέν. Αγνοήστε το θέμα της κανονικοποίησης των κυματοσυναρτήσεων γι' αυτό το ερώτημα.

(γ) (Μία μονάδα επί πλέον:) Υπολογίστε τον παράγοντα κανονικοποίησης των κυματοσυναρτήσεων.

**Θέμα 3** Θεωρήστε ότι, τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ένας αρμονικός ταλαντωτής (σωματίδιο με μάζα  $m$  που κινείται σε δυναμικό  $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ) βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi_0\rangle$ , η οποία είναι ο γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  που δίνει τη μέγιστη αναμενόμενη τιμή για το  $x$ :  $|\psi_0\rangle = N(|0\rangle + c|1\rangle)$ . Για απλότητα θεωρήστε ότι οι σταθερές  $N$  και  $c$  είναι πραγματικές. Να βρείτε την αναμενόμενη τιμή για το  $x$  σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t > 0$ .

**Θέμα 4** Θεωρήστε σωματίδιο με σπιν  $\frac{1}{2}$ , που περιγράφεται κατ' αρχάς από τη Χαμιλτονιανή  $\hat{H}_0 = \alpha \hat{S}_z^2$ , με ιδιοσυναρτήσεις τις  $X_{+1/2} \equiv X_+$ ,  $X_{-1/2} \equiv X_-$ , για τις οποίες:

$$\hat{S}_z^2 X_m = \frac{3\hbar^2}{4} X_m, \quad \hat{S}_z X_m = m\hbar X_m.$$

Επί πλέον επιδρά η διαταραχή  $\hat{V} = 2\beta(\hat{S}_+ \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_-)$ , όπου  $|\beta| \ll |\alpha|$ , ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή. Αγνοούμε όλους τους υπόλοιπους κβαντικούς αριθμούς και επικεντρώνουμε στην κβαντική ποσότητα του σπιν. Συνεπώς η συνολική Χαμιλτονιανή είναι:  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ . Να βρεθούν οι διορθώσεις πρώτης τάξης στην ενέργεια. Επίσης να λυθεί το αντίστοιχο ομογενές σύστημα και να προσδιοριστούν οι γραμμικοί συνδυασμοί  $c_+ X_+ + c_- X_-$ , που σχετίζονται με τις αντίστοιχες διορθώσεις.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**