Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα» (Επαναληπτική 2017)

Θέμα 1. (α) Έστω $0 \neq x$, η ακριβής λύση του συστήματος Ax=b, όπου A n×n αντιστρέψιμος πίνακας και x,b διανύσματα. Αν x+δx είναι η λύση του διαταραγμένου συστήματος A(x+δx)= b+δb, να δείξετε

$$\frac{1}{\kappa(\mathrm{A})}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

(β) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2017\times 2017}$ θετικά ορισμένος, συμμετρικός, με ιδιοτιμές που περιέχονται στο διάστημα [10,100], και διάνυσμα $b=[1,1,0,\ldots,0]^T \in \mathbb{R}^{2017}$. Αν x είναι η ακριβής λύση του συστήματος Ax=b, και x+δx είναι η λύση του διαταραγμένου συστήματος A(x+δx)= b+δb, με $\delta b=[1,1,10^{-6},..,10^{-6}] \in \mathbb{R}^{2017}$ να βρεθεί μία εκτίμηση σφάλματος για την ποσότητα $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$.

Θέμα 2. Για το σύστημα Ax=b με $b=[4,10,4]^T$ και

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

να διατυπώσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Jacobi **(JOR)** ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία **Richardson** ($x^{(k+1)}=x^{(k)}+a_k Q^{-1} r^{(k)}$, όπου $r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$, $a_k=a$). Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης α, για τις οποίες η **JOR** συγκλίνει. Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης για τις οποίες η **JOR** να συγκλίνει ταχύτερα από την αρχική μέθοδο Jacobi;

(β) Να μελετήσετε τη σύγκλιση της επαληπτικής μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί την μέθοδο Gauss-Seidel, **(SOR)** για το πρόβλημα του ερωτήματος (α).

Θέμα 3 (α) Να περιγράψετε τη μέθοδο των κλίσεων ως επαναληπτική διαδικασία Richardson (μη στάσιμη) για το πρόβλημα $Ax=[6,-5,4]^T$ με

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

και να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου.

(β) Να ορίσετε την ενεργειακή νόρμα $\|.\|_A$ για τον πίνακα του ερωτήματος (α) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάζονται ώστε το σφάμα να είναι μικρότερο από 10^{-6}. Δίνεται ο τύπος $\|e^{(k+1)}\|_A \leq \dfrac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1}\|e^{(k)}\|_A$ και η πραγματική λύση $x=[1,-1,1]^T$.

Θέμα 4

(α) Να ορίσετε το πηλίκο Rayleigh για συμμετρικό και θετικά ορισμένο τετραγωνικό πίνακα και να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, ισχύει $\lambda_{\min} \leq R(x) \leq \lambda_{\max}$, όπου $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ είναι η μίκροτερη και η μεγαλύτερη αντιστοίχως ιδιοτιμή.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2=1$ $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2=1$ και $A \in \mathbb{R}^{n\mathrm{x}n}$, συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Αν $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ η κ-ιδιοτιμή του A, με $\|u^{(k)}\|_2=1$ που ικανοποιεί $\|x-u^{(k)}\|_2=O(\varepsilon)$ να δειχθεί ότι $R(x)=\lambda_k+O(\varepsilon^2)$.