ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΑ Β, 15-6- 2017

Θέμα1°: α)Να προσδιοριστεί ο τύπος της εξίσωσης

$$(1+x_3^2)u_{x_1x_1}+x_1^2u_{x_2x_2}+x_3^2u_{x_3x_3}+5u_{x_1}+u=0$$ **(μον. 0.25)**

$$(4+x_2^2)u_{x_1x_1}+x_2^2u_{x_2x_2}+2x_2^2u_{x_1x_2}+3u_{x_1}+u=0$$ **(μον. 0.25)**

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x_1,x_2)=g(\frac{x_1}{x_2}),x_2\neq 0,\ f\in C^1$ επιλύει την εξίσωση

$$x_1u_{x_1}+x_2u_{x_2}=0$$ **(μον. 0.25)**

γ) Αν η $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών- συνοριακών τιμών $u_{xx}(x,t)=\kappa u_t(x,t), 0<x<2, t>0, u(x,0)=f(x), u\ (0,t)=u\ (2,t)=0, \kappa>0$ να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική.(Υπ:Χρησιμοποιήστε το $J(t)=\frac{1}{2\kappa}\int_0^2 v^2(x,t)dx$) **(μον. 1)**

δ) Δίνεται το πρόβλημα $\Delta u(\rho,\varphi)=f(\varphi), 0<\rho<b, 0\leq\varphi<2\pi, \frac{\partial u(\mathrm{b},\varphi)}{\partial\rho}=g(\varphi),$

$u\in C^2(\Omega\cup\partial\Omega),\Omega$ ο κύκλος. i) Να διατυπωθεί και αποδειχτεί η συνθήκη υπό την οποία το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. ii) Με αυτή την υπόθεση να δειχτεί ότι το πρόβλημα είναι μοναδικά επιλύσιμο συν μία προσθετική σταθερά. (Υπόδειξη: Δίνεται η πρώτη ταυτότητα του Green $\int_\Omega v\Delta u dx=-\int_\Omega\sum_\iota v_{x_i}u_{x_i}dx+\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\eta}ds$). **(μον.1)**

Θέμα2°:α) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0, 0\leq r<2, 0\leq\theta\leq\pi, 0\leq\varphi<2\pi, u(2,\theta,\varphi)=1+\cos\theta+7\cos^2\theta\ .$$

Δίνονται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0,$$ και τα πολυώνυμα Legendre

$$P_0\ (\mathrm{x})=1, P_1\ (\mathrm{x})=x, P_2\ (\mathrm{x})=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$ **(μον. 1.5)**

β) Να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν, χωρίς να λυθούν, για να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1,x_2)=6,(x_1,x_2)\in(0,3)\times(0,3),$$

$$u(0,x_2)=0, u(x_1,0)=0, u(3,x_2)=5x_2, u(x_1,3)=x_1^2+4$$ **(μον.0.75)**

Θέμα3° : α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα αρχικών – συνοριακών τιμών:
$u_t(x,t)-\ u_{xx}(x,t)=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),\ x,x_0\in(0,a),\ t,t_0>0,a>0,$
$u_x(0,t)=u_x(a,t)=0,\ \ t\geq 0,$
$u(x,0)=0,\ x\in[0,a]$. **(μον.1.25)**
β) Επιλύστε το παραπάνω πρόβλημα για $a=\infty$. **(μον.1.25)**

Θέμα4° : α) Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση $G(r)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}e^{-r}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\Delta G+(k^2-1-2ik)G=-\delta(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r}\in R^3$, $r=|\boldsymbol{r}|$. (Δίνεται, αν το χρειαστείτε, ότι $\Delta f(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$). **(μον.1)**

β) Έστω το μη ομογενές πρόβλημα

$$y''(x)+25y(x)=f(x)+\frac{99}{4}sin\left(\frac{x}{2}\right)+sin(5x),\ \ 0<x<\pi,$$
$$y(0)=0,\ y(\pi)=1\ .$$

β1) Βρείτε το C_1 ώστε η συνάρτηση $C_1sin\left(\frac{x}{2}\right)$ να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με διέγερση **αποκλειστικά** τον όρο $\frac{99}{4}sin\left(\frac{x}{2}\right)$. **(μον.0.5)**

β2) Να προσδιορίσετε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ώστε το παραπάνω πρόβλημα να επιλύεται. **(μον.1)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ