ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Ιούνιος 2015**

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θέμα 1 (2.5 μονάδες)

Τα ερωτήματα Α και Β δε σχετίζονται μεταξύ τους.

Α. Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής μεταλλικών ράβδων το 20% δεν είναι καλής ποιότητας διότι παρουσιάζουν πολύ μικρές ρωγμές οι οποίες δεν είναι ευδιάκριτες. Για το σκοπό αυτό κάθε ράβδος μετά την παραγωγή ελέγχεται από ένα μηχάνημα με ακτίνες lazer και αν ο έλεγχος είναι θετικός η ράβδος καταστρέφεται. Η αξιοπιστία όμως του ελέγχου είναι 90% όταν η ράβδος δεν έχει ρωγμές και 80% όταν η ράβδος είναι ελαττωματική. (α) Ποιο ποσοστό της παραγωγής ράβδων καταστρέφεται? (β) Ποιο ποσοστό από τις ράβδους που καταστρέφονται είναι στην πραγματικότητα καλής ποιότητας?

Β. Τρεις παίκτες Α, Β και Γ ρίχνουν ένα νόμισμα συνεχώς, με τη σειρά που αναφέρονται. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει το παιχνίδι. Να συμβολισθεί με άλγεβρα συνόλων το γεγονός Ε={ο παίκτης Α θα κερδίσει το παιχνίδι}. Να βρεθεί η πιθανότητα του γεγονότος Ε.

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)

Εστω Χ τ.μ. και $f(x)$ συνάρτηση που ορίζεται ως

$$f(x)=\begin{cases} c, & -4<x<0 \\ 0.25, & 2<x<4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί το c έτσι ώστε η $f(x)$ να είναι σ.π.π. της τ.μ. Χ.

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Χ.

(γ) Εστω τυχαίο δείγμα $X_1,\ldots,X_{100}$ από αυτή την κατανομή. Να βρεθεί η πιθανότητα ο δειγματικός τους μέσος να μην υπερβαίνει το 1.

Θέμα 3 (2.5 μονάδες)

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποιο πληθυσμό με σ.π.π.

$$f(x,\theta)=(\theta+1)(1-x)^{\theta},\ 0<x<1,\ \theta>0.$$

(α) Να βρεθεί ΕΜΠ του θ.

(β) Να βρεθεί ΕΜΠ της μέσης τιμής των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$.

(γ) Να βρεθεί ροποεκτιμήτρια του θ.

Θέμα 4. (2.5 μονάδες)

Μια εταιρεία κατασκευάζει σκοινιά των οποίων η δύναμη θραύσης έχει μέση τιμή 100 κιλά και τυπική απόκλιση 6 κιλά. Μια νέα κατασκευαστική διαδικασία πιστεύεται ότι είναι ικανή να αυξήσει τη μέση δύναμη θραύσης. Η εταιρεία αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τη νέα διαδικασία αν πράγματι αυτή αυξάνει τη μέση δύναμη θραύσης, γι΄ αυτό χρησιμοποίησε τη νέα διαδικασία μόνο για την παραγωγή 25 σκοινιών τα οποία έδωσαν μέση αντοχή 102.796 κιλά.

(α) Να γίνει κατάλληλος στατιστικός έλεγχος σε α=1%.

(β) Ποια η του p-value του ελέγχου? Τι υποθέσεις πρέπει να γίνουν για τον πιο πάνω έλεγχο?

(γ) Δύο ερευνητές κάνουν τον ίδιο στατιστικό έλεγχο σχετικά με έναν πληθυσμό βασισμένοι στο ίδιο δείγμα και ο ένας απορρίπτει και ο άλλος αποδέχεται την μηδενική υπόθεση. Πως εξηγείται αυτό?

(δ) Να κατασκευαστεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση δύναμη θραύσης της νέας διαδικασίας.

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,\dots$	$E(X)=\frac{1}{p},\ Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\dots$	$E(X)=\lambda,\ Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu,\ Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta},\ Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda},\ Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Δίνεται ότι:
Φ(1.96)=0.975, Φ(2.33)=0.990, Φ(1.645)=0.95, Φ(1.29)=0.90
Φ(2.57)=0.995, Φ(1.5)=0.933, Φ(3.99)=0.999, Φ(1.87)=0.969,
Φ(2.055)=0.980, Φ(2.44)=0.992, Φ(0.5)=0.691, Φ(0.85)=0.802,
Φ(3.46)=0.999

$P(t_{11}>1.796)=0.05, P(t_{14}>2.624)=0.01, P(t_7>2.998)=0.01, P(t_{11}>1.363)=0.1$

$P(t_6>2.447)=0.025, P(t_8>2.896)=0.01, P(t_6>1.943)=0.05, P(t_8>2.306)=0.025$

$P(t_7>1.895)=0.05, P(t_7>2.365)=0.025, P(t_{12}>1.782)=0.05, P(t_{10}>1.812)=0.05$

$P(t_{24}>2.492)=0.01, P(t_{25}>2.787)=0.005, P(t_{24}>2.797)=0.005, P(t_{25}>2.485)=0.01$

$P(\chi_9^2>21.66)=0.01, P(\chi_8^2>20.09)=0.01, P(\chi_5^2>15.09)=0.01, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.01$

$P(\chi_6^2>12.59)=0.01, P(\chi_9^2>16.91)=0.05, P(\chi_8^2>15.50)=0.05, P(\chi_{12}^2>21.03)=0.05$
$P(\chi_9^2>2.08)=0.99, P(\chi_8^2>1.64)=0.99, P(\chi_5^2>0.5543)=0.01, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.99$

*** Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ωρες***