

Φυσική III (Κυματική), ΣΕΜΦΕ 3^ο Εξάμηνο, 2016-2017

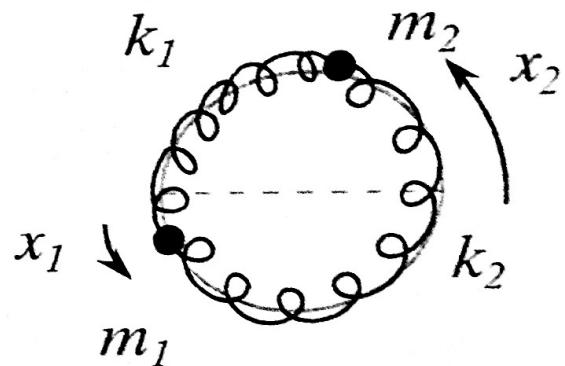
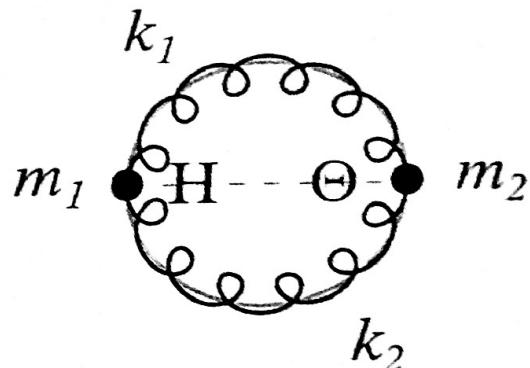
Εξέταση επαναληπτική, Τρίτη 12/09/2017 08:30, Διάρκεια 2 ώρες

Διδάσκων: Θ. Αλεξόπουλος

1.

Δύο ελατήρια σταθεράς k_1, k_2 και αμελητέας μάζας είναι περασμένα σε κυκλικό ακλόνητο στεφάνι και συνδέονται με δύο δακτυλιοειδή σώματα μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, που είναι κι αυτά περασμένα στο στεφάνι και μπορούν να ολισθαίνουν κατά μήκος του. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

- (a) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων.
- (β) Αν $m_1 = m_2 = m$ και $k_1 = k_2 = k$, να βρείτε τις συχνότητες των KTT του συστήματος. Εξηγήστε τη φυσική σημασία τους.
- (γ) Τη στιγμή $t = 0$, τα σώματα m μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας κατά $x_1(0) = 2 \text{ m}$ και $x_2(0) = 1 \text{ m}$, αντίστοιχα, και αφήνονται ελεύθερα. Να υπολογιστεί συναρτήσει του χρόνου η θέση και η ταχύτητα της κάθε μάζας. Υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία κάποιο από τα δύο σώματα περνάει από τη θέση αρχικής ισορροπίας του. $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$:



2.

Η εξίσωση που διέπει τη διάδοση εγκάρσιου κύματος σε μία μη-ιδανική χορδή είναι της μορφής

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a v_0^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Υπολογίστε:

- (α) τη σχέση διασποράς,
- (β) τη φασική και την ομαδική ταχύτητα ως συναρτήσεις του κυματικού αριθμού k ,
- (γ) τα μήκη κύματος και τις αντίστοιχες συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης αυτής της μη-ιδανικής χορδής, αν έχει μήκος L και τα δύο της άκρα είναι σταθερά. Υπόδειξη: Θεωρήστε μετατοπίσεις της μορφής

$$y(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$$

3.

Υποθέτουμε ότι ένα διηλεκτρικό μέσο χαρακτηρίζεται από την εξής σχέση διασποράς

$$\omega(k) = \omega_0 (1 + 6a^2 k^2 - a^4 k^4)$$

που συνδέει την κυκλική συχνότητα ω με τον κυματικό αριθμό k ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Ποια μέση συχνότητα πρέπει να έχουν οι κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για την ιηλεπικοινωνία στο μέσο αυτό. ώστε τα σήματα να μεταδίδονται όσο το δυνατόν ταχύτερα:

Υπόδειξη: Σκεφτείτε κάτι για την ομαδική ταχύτητα v_g .

4. Το ηλεκτρικό πεδίο ενός στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει συνιστώσες

$$E_x(z, t) = A \cos(\omega t) \cos(kz), \quad E_y(z, t) = E_z(z, t) = 0$$

(a) Βρείτε το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο με μέση χρονική τιμή μηδέν, που αντιστοιχεί στο παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο, και σχεδιάστε τα δύο πεδία συναρτήσει του z .

(b) Δείξτε ότι για το στάσιμο αυτό κύμα η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους $\lambda/4$, όπου $\lambda = 2\pi/k$ (ανάμεσα σ' ένα δεσμό και μία κοιλία του E_x).

Τυπολόγιο:

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B), \quad A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{Νόμος Νεύτωνα: } F = \frac{dp}{dt}, \quad p = mv, \quad v = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$\text{Δυναμική/Κινητική Ενέργεια: } F = -\nabla U, U(A) - U(B) = - \int_B^A F \cdot dr, \quad K = \frac{1}{2}m|v|^2, \quad K + U = \text{σταθερή}$$

$$\text{Αρμονικός ταλαντωτής: } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x = x_0 \sin(\omega t + \phi), \quad U = \frac{1}{2}Cx^2, \quad F = -kx$$

$$\dots \text{με απόσβεση: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2\tau} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad x = x_0 e^{-t/(2\tau)} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{Κυματική εξίσωση: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{διάνυσμα Poynting: } \langle S \rangle = \frac{1}{\mu_0} E \times B$$

$$\text{Ηλεκτρομαγνητικά κύματα: } v_\phi = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \text{ στο κενό}$$

$$v_\phi = c/n, \quad n = \text{δείκτης διάθλασης μέσου διάδοσης.}$$

$$\text{Ομαδική ταχύτητα: } v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}, \text{ όπου } \omega = \omega(k) \text{ η σχέση διασποράς.}$$

Διάδοση κύματος χωρίς παραμόρφωση: Η έκφραση $f(x+vt)$ και $g(x-vt)$ παριστάνει κύμα (διαταραχή) που διαδίδεται σε μία διάσταση χωρίς παραμόρφωση με στιγμιαία απομάκρυνση f (αντίστοιχα g) και ταχύτητα v προς τα αριστερά) και ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση.

Οδεύσον αρμονικό κύμα

Βαθμωτό, σε μία διάσταση: $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$

Βαθμωτό, στο χώρο: $\psi(r, t) = \psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \psi_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$

Διανυσματικό, στο χώρο:

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \text{ όπου } \mathbf{E}_0 = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}$$

Ταχύτητα φάσης: $v_\phi = \omega(k)/k$

όπου $\omega = \omega(k)$ η σχέση διασποράς = κυκλική συχνότητα = $2\pi/\text{περίοδος } T$