



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

28 Αυγούστου 2013

Απαντήστε και στα τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1°

(A) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y = 1, 3x - 2z = 5$ και $\varepsilon_2 : x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$.

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου των δύο ευθειών

Μονάδες 1

(B) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 10z + 5 = 0$. (*)

(i) Να αποδείξετε ότι η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση (*) είναι μία σφαίρα Σ , της οποίας να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 0,5

(ii) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi: x + y + z - 5 = 0$ τέμνει τη σφαίρα Σ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της τομής τους.

λ.θ.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2°

(i) Κατασκευάστε ένα γραμμικό σύστημα με 3 αγνώστους, του οποίου το σύνολο λύσεων να

είναι το $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2t \\ 3 \\ 1+t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$. Στη συνέχεια δώστε γεωμετρική ερμηνεία για το σύστημα

και για το σύνολο Λ .

Μονάδες 1

(ii) Να διερευνηθεί και να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα Σ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x + y + z + t = 1$$

$$-x + y - z + t = -1$$

$$x + 3y + z + 3t = a$$

$$3x + 2y + 3z + 2t = b$$

(iii) Στην περίπτωση απειρίας λύσεων συνδέσατε το σύνολο λύσεων Λ του Σ με το σύνολο λύσεων Λ_0 του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος Σ_0 .

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 3°

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r} = (x, y) \rightarrow f(\mathbf{r}) = (x', y')$ απεικονίζει το σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου στο συμμετρικό του $M'(x', y')$ ως προς την ευθεία

$$\varepsilon: \mathbf{r} = t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

(i) Να εκφράσετε την εικόνα $f(\mathbf{r})$ συναρτήσει των \mathbf{r} και \mathbf{u} .

(ii) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.

$$f(\vec{r}) = -\vec{r} + 2 \cdot \frac{\langle \vec{r}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

(iii) Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\{\mathbf{i}=(1,0), \mathbf{j}=(0,1)\}$ του \mathbb{R}^2 .

(iv) Να εκφράσετε τα x', y' συναρτήσει των x, y .

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Δείξτε ότι $A^2 = A + 2I$. Στη συνέχεια δείξτε ότι ο A

είναι αντιστρέψιμος και δώστε τον A^{-1} συναρτήσει του A .

Μονάδες 1

B) Δίνονται οι υπόχωροι του \mathbb{R}^3 :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\} \text{ και } V_2 = [(-2, 1, 0), (1, 3, -7), (1, 0, -1)].$$

(i) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση για τον καθέναν από τους V_1 και V_2 .

(ii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υποχώρου $V_1 + V_2$.

(iii) Βρείτε τη διάσταση του $V_1 \cap V_2$ και συνδέστε την με τις διαστάσεις των V_1, V_2 και

$V_1 + V_2$ (χωρίς απόδειξη).

Μονάδες 1,5

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

$$\begin{aligned} & (3, 1, 0) \cdot (2, 4, 2) = 6 + 4 + 0 = 10 \\ & 2 \cdot (3, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = 2(3+2) = 2 \cdot 5 = 10 \end{aligned}$$