«ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ» 09/2017

Θέμα 1 (3 βαθμοί): (α) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών στο [0,1]:

$$y' - (1/3)y = -((1/3) + 2x)e^{-x^2} - (1/3)$$
$$y(0) = 2$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler (με ομοιόμορφο βήμα), $|y_n - y(x_n)| \le \frac{h}{2}\frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L} \max_{x_0 \le x \le x_n} |y''(x)|$ (όπου L είναι η σταθερά Lipschitz της f ως προς y), να υπολογιστεί το βήμα h ώστε το σφάλμα στο $x_N=1$ να είναι μικρότερο από 10^{-4}.

Δίνεται η λύση: $y(x) = e^{-x^2} + 1$.

(β) Για το πρόβλημα του ερωτήματος (α) να ορίσετε την πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδο του τραπεζίου στο διάστημα [0,1] με βήμα h=1/N, και να υπολογίσετε μια προσέγγιση του y(1) χρησιμοποιώντας 2 υποδιαστήματα.

Θέμα 2 (2 βαθμοί): (α) Η γενική κ-βηματική μέθοδος έχει τη μορφή

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \quad \text{όπου } a_j, \beta_j \in \mathbb{R}, a_k \ne 0, a_0^2 + \beta_0^2 \ne 0.$$

Να ορίσετε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού και με την βοήθεια τους να δώσετε τον ορισμό της μηδενικής ευστάθειας και της Α-ευστάθειας.

Είναι η μηδενική ευστάθεια ανεξάρτητη από τους συντελεστές β_j;

(β) Αν το 2^o χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας 2-βηματικής μεθόδου είναι το

$\sigma(z) = (1/3)z^2 + (4/3)z + (1/3)$,

να βρεθεί το 1^o χαρακτηριστικό πολυώνυμο (βαθμού 2) ώστε η τάξη ακρίβειας της μεθόδου να είναι τουλάχιστον 2. Στη συνέχεια να βρεθεί η τάξη ακρίβειας της μεθόδου.

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$ και υποθέτουμε πως η συνάρτηση f είναι ομαλή και οι αρχικές συνθήκες κατάλληλα επιλεγμένες.

Υπενθύμιση: $C_p = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j$

Θέμα 3 (2 βαθμοί) : (α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α, ώστε η παρακάτω μέθοδος να είναι μηδενικά ευσταθής.

$y_{n+3} + (2a-3)(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = ha(f_{n+2} + f_{n+1})$

με κατάλληλες αρχιμκές συνθήκες,

Να αποδείξετε ότι αν η μέθοδος είναι μηδενικά ευσταθής τότε η τάξη ακρίβειας της μεθόδου δεν μπορεί να ξεπεράσει το 2.

Θέμα 4 (3 βαθμοί):

(α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$-\frac{d}{dx}\left((x+2)\frac{du}{dx}\right)+u(x)=f(x)$$

$$u(0)=1, \quad u(1)=e^{-1}+1$$

(β) Να ορίσετε τη διακριτή λύση Galerkin, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη). Να αποδείξετε ότι οι γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ανήκουν στο χώρο $H_0^1(0,1)$.

(γ) Δίνεται ο ακόλουθος τύπος σφάλματος για το πρόβλημα των ερωτημάτων (α)-(β):

$$\| u-u^h \|_A \le \frac{h}{\pi}\left\{\max_{a\le x\le b} p(x)+\frac{h^2}{\pi^2}\max_{a\le x\le b} r(x)\right\}^{1/2} \| u''(x) \|_{L^2(a,b)}$$

όπου $\| f \|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b | f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}$.

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\| u-u^h \|_A \le 10^{-3}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται $u(x)=e^{-x^2}+x^3$.

Διάρκεια εξέτασης: 2&1/2 ώρες.

Καλή επιτυχία.