# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## Καμπύλες

Έστω η καμπύλη

$C: r(t)$

$C: \varphi(s)$, s φυσική παράμετρος $t = t(s)$.

$$\boxed{\kappa(s) = \varphi''(s)}$$ *διάνυσμα καμπυλότητας*

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\|r'(t)\|^2}\left[r''(t) - \frac{r''(t)\cdot r'(t)}{\|r'(t)\|^2} r'(t)\right].$$

$$q(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)$$ *κέντρο καμπυλότητας*

$$\rho(s) = \frac{1}{\|\kappa(s)\|}$$ *ακτίνα καμπυλότητας*

$$\begin{aligned} t'(s) &= \kappa(s)\, n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s)\, t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s)\, n(s) \end{aligned}$$ *εξισώσεις Frenet.*

$$|\kappa(s)| = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}$$

## Επιφανειες

Έστω

$S: r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$

είναι στοιχειώδης επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

*Θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης*

$$\begin{aligned} L(u, v) &= r_{11}(u, v) \cdot N(u, v) \\ M(u, v) &= r_{12}(u, v) \cdot N(u, v) \\ N(u, v) &= r_{22}(u, v) \cdot N(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= -N_1 \cdot r_1 \\ M &= -N_2 \cdot r_1 = -N_1 \cdot r_2 \\ N &= -N_2 \cdot r_2 \end{aligned}$$

$$L = \frac{[r_1, r_2, r_{11}]}{H}$$

$$M = \frac{[r_1, r_2, r_{21}]}{H}$$

$$N = \frac{[r_1, r_2, r_{22}]}{H}$$

*σύμβολα Christofell*

$$\Gamma_{ijk}(u, v) = r_i(u, v) \cdot r_{jk}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.$$

$$\Gamma^1_{jk}(u,v) = \frac{G(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v)}{H^2(u,v)}$$

$$\Gamma^2_{jk}(u,v) = \frac{E(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v)}{H^2(u,v)}$$

$LN - M^2 \begin{cases} >0, & \text{ελλειπτικό} \\ <0, & \text{υπερβολικό} \\ =0 \text{ και } L \neq 0 \text{ ή } N \neq 0 & \text{παραβολικό} \\ =0 \text{ και } L = N = 0, & \text{επίπεδο} \end{cases}$

## *Γεωδαισιακές Διαφορικές Εξισώσεις*

Έστω η επιφάνεια

$S: r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$

κλάσης 2 και έστω η καμπύλη της επιφάνειας

$\gamma$: $\varphi(s) = r(u(s), v(s))$. s φυσική παράμετρος.

*Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) οι u(s), v(s) ικανοποιούν το σύστημα*

$$\begin{aligned} u''(s) + \Gamma^1_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^1_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^1_{22}(v'(s))^2 &= 0 \\ v''(s) + \Gamma^2_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^2_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^2_{22}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}$$

*Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) ισχύουν*

$$\begin{aligned} E u''(s) + F v''(s) + \Gamma_{111}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{112}u'(s)v'(s) + \Gamma_{122}(v'(s))^2 &= 0 \\ F u''(s) + G v''(s) + \Gamma_{211}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{212}u'(s)v'(s) + \Gamma_{222}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}$$

*Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s ισχύει*

$$\Gamma^2_{11}(u'(s))^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})(u'(s))^2 v'(s) + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})u'(s)(v'(s))^2 - \Gamma^1_{22}(v'(s))^3 + u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s) = 0$$

*Η πρόταση αυτή ισχύει και όταν η s είναι τυχαία παράμετρος*

$$\boxed{\mu = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 \cdot k_2} \qquad \mu = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

$$(FN - GM)\lambda^2 + (NE - GL)\lambda + (ME - FL) = 0. \tag{4.4}$$

$$(FL - EM)\mu^2 + (LG - EN)\mu + (MG - FN) = 0. \tag{4.5}$$

<u>Οι κύριες διευθύνσεις στο σημείο P.</u>