$\dot{T} = \kappa 2\upsilon N,\ \dot{N} = -\kappa 2\upsilon T$. Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ *φυσική πα/τρος:* Βασικά μοναδιαία διανύσματα: $T(s) = r'(s)$,

$N(s) = \dfrac{r''(s)}{\|r''(s)\|}$, $B(s) = T(s) \times N(s)$,Τύποι Frenet : $T' = \kappa N$,

$N' = -\kappa T + \tau B,\ B' = -\tau N$, καμπυλότητα : $\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|r''(s)\|$, στρέψη $\tau(s) = -N \cdot B'$. Καμπύλη κέντρων καμπυλότητας $e(s) = r(s) + \dfrac{1}{k(s)} N(s)$. *Για τυχαία παράμετρο:* $\upsilon(t) = \|\dot{r}(t)\|$,

$T = \dfrac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|},\quad B = \dfrac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|},\quad N = B \times T \quad \kappa = \dfrac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3},\quad \tau = \dfrac{(\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r})}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|^2}$ Τύποι Frenet : $\dot{T} = \kappa \upsilon N$,

$\dot{N} = -\kappa \upsilon T + \tau \upsilon B,\ \dot{B} = -\tau \upsilon N$.

Έστω η καμπύλη

C: r(t)

C: φ(s), s φυσική παράμετρος t = t(s).

$$\boxed{\kappa(s) = \varphi''(s)}$$ *διάνυσμα καμπυλότητας*

$$\boxed{\varphi''(s) = \frac{1}{\|r'(t)\|^2}\left[r''(t) - \frac{r''(t) \cdot r'(t)}{\|r'(t)\|^2} r'(t)\right]}.$$

$$\boxed{q(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)}$$ *κέντρο καμπυλότητας*

$$\boxed{\rho(s) = \frac{1}{\|\kappa(s)\|}}$$ *ακτίνα καμπυλότητας*

$$\boxed{\begin{aligned} t'(s) &= \kappa(s)\, n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s)\, t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s)\, n(s) \end{aligned}}$$ *εξισώσεις Frenet.*

$$\boxed{|\kappa(s)| = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}}$$

$$\boxed{\tau(s) = \frac{[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}}$$

Έστω

S: r(u, v), (u, v)∈Ω

είναι στοιχειώδης επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης

$$\boxed{\begin{aligned} L(u, v) &= r_{11}(u, v) \cdot N(u, v) \\ M(u, v) &= r_{12}(u, v) \cdot N(u, v) \\ N(u, v) &= r_{22}(u, v) \cdot N(u, v) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= -N_1 \cdot r_1 \\ M &= -N_2 \cdot r_1 = -N_1 \cdot r_2 \\ N &= -N_2 \cdot r_2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{L = \frac{[r_1, r_2, r_{11}]}{H} \qquad M = \frac{[r_1, r_2, r_{21}]}{H} \qquad N = \frac{[r_1, r_2, r_{22}]}{H}}$$

σύμβολα Christofell

$$\boxed{\Gamma_{ijk}(u, v) = r_i(u, v) \cdot r_{jk}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma^1_{jk}(u,v) &= \frac{G(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v)}{H^2(u,v)} \\ \Gamma^2_{jk}(u,v) &= \frac{E(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v)}{H^2(u,v)} \end{aligned}}$$

$$LN - M^2 \begin{cases} >0, \text{ ελλειπτικό} \\ <0, \text{ υπερβολικό} \\ =0 \text{ και } L \neq 0 \text{ ή } N \neq 0 \text{ Παραβολικό.} \\ =0 \text{ και } L = N = 0, \text{ επίπεδο} \end{cases}$$

Γεωδαισιακές Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω η επιφάνεια

S: r(u, v), (u, v)∈Ω

κλάσης 2 και έστω η καμπύλη της επιφάνειας

γ: φ(s) = r(u(s), v(s)). s φυσική παράμετρος.

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) οι u(s), v(s) ικανοποιούν το σύστημα

$$\boxed{\begin{aligned} u''(s) + \Gamma^1_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^1_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^1_{22}(v'(s))^2 &= 0 \\ v''(s) + \Gamma^2_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^2_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^2_{22}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}}$$

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} E u''(s) + F v''(s) + \Gamma_{111}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{112} u'(s)v'(s) + \Gamma_{122}(v'(s))^2 &= 0 \\ F u''(s) + G v''(s) + \Gamma_{211}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{212} u'(s)v'(s) + \Gamma_{222}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}}$$

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s ισχύει

$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma^2_{11}(u'(s))^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})(u'(s))^2 v'(s) + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}) u'(s)(v'(s))^2 - \\ &- \Gamma^1_{22}(v'(s))^3 + u'(s) v''(s) - u''(s) v'(s) = 0 \end{aligned}}$$

Η πρόταση αυτή ισχύει και όταν η s είναι τυχαία παράμετρος