ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι - ΣΕΜΦΕ

Φεβρουάριος 2013

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

Η εξέταση γίνεται με κλειστά βιβλία, σημειώσεις και κινητά τηλέφωνα.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Θέμα 1ο Μιά βάρκα με μάζα m κινείται με ταχύτητα v_0 και κάποια στιγμή, κατά την οποία βρίσκεται στη θέση $x = 0$, σβήνει η μηχανή της. Στο εξής κινείται στο νερό υπό την επίδραση δύναμης αντίστασης που δίνεται από τη σχέση:

$$F = -mK(v^3 + w^2 v),$$

όπου τα K και w είναι θετικές σταθερές. $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}v$

(α) Να βρεθεί η απόσταση που διανύει η βάρκα ως συνάρτηση της ταχύτητάς της.

(β) Να δειχτεί ότι, ανεξάρτητα από το μέγεθος της αρχικής ταχύτητας v_0, η βάρκα δεν θα μπορέσει να μετακινηθεί κατά διάστημα μεγαλύτερο από $\frac{\pi}{2Kw}$.

Υποδείξεις: Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τη σχέση: $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$. Πιθανώς χρήσιμο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a}$. → μέχρι $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Θέμα 2ο Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε πεδίο, του οποίου η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U(r) = -U_0 r e^{-\frac{r}{r_0}},$$

όπου τα U_0 και r_0 είναι θετικές σταθερές και το $r > 0$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από ένα σταθερό σημείο Ο.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη $\vec{F}$ και δείξτε ότι η στροφορμή $\vec{L}$ του σωματιδίου ως προς το Ο είναι σταθερή. $\frac{dL}{dt} = N = 0 \Rightarrow$ διατηρείται το L

(β) Σχεδιάστε την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας και δείξτε ότι υπάρχει σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

(γ) Αν το σωματίδιο μετατοπιστεί κατά μικρή απόσταση από τη θέση ισορροπίας, να δείξετε ότι θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την συχνότητά της. $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

Θέμα 3ο Θεωρήστε ράβδο με συνολική μάζα M και μήκος L, που μπορεί να περιστρέφεται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από έναν ακίνητο οριζόντιο άξονα Α, που βρίσκεται στο ένα της άκρο. Η γραμμική πυκνότητα $\mu(x) \equiv \frac{dm}{dx}$ δεν είναι σταθερή, αλλά δίνεται από τη σχέση

$$\mu(x) = \mu_0 \frac{x(L-x)}{L^2},$$

όπου το μ_0 είναι μια θετική σταθερά και το x είναι η απόσταση του τμήματος dx από το άκρο Α, δηλαδή η στοιχειώδης μάζα μεταξύ x και $x + dx$ ισούται με $dm(x) = \mu(x)dx$.

(α) Να υπολογιστεί η μάζα M της ράβδου και η ροπή αδράνειάς της I_A περί τον άξονα A συναρτήσει των σταθερών μ_0 και L. Με τη βοήθεια των δύο αυτών αποτελεσμάτων εκφράστε τη ροπή αδράνειας I_A συναρτήσει των M και L.

(β) Ελέγξτε ότι η γραμμική πυκνότητα είναι συμμετρική ως προς το μέσο της ράβδου, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση $\mu(\frac{L}{2}+x) = \mu(\frac{L}{2}-x)$. Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας της ράβδου; στη μέση.

(γ) Μια μπάλλα πλαστελίνης με μάζα m και ταχύτητα v κινείται οριζόντια και προσκολλάται στο μέσον της ράβδου. Ποιό μέγεθος διατηρείται; Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα της μπάλλας που απαιτείται, ώστε η ράβδος να κάνει έναν πλήρη κύκλο.

Τυπολόγιο:

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}),\ \ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

Νόμος Νεύτωνα: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Δυναμική ενέργεια: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U,\ \ U(A) - U(B) = -\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Πολικές συντεταγμένες: $\vec{r} = r\hat{r},\ \ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$,

$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Συνθήκη για διατηρητική δύναμη: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$. Ισχύς: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Στροφορμή, ροπή: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v},\ \ \vec{N} = \vec{r}\times\vec{F},\ \ \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα: $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

Κέντρο μάζας: $\overrightarrow{R}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \overrightarrow{r}\, dm}{\int dm}$,

$\overrightarrow{V}_{KM} = \dot{\overrightarrow{R}}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \overrightarrow{v}\, dm}{\int dm}$.

Αρμονικός ταλαντωτής: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,\ \ T = \frac{2\pi}{\omega_0},\ \ x = x_0\sin(\omega_0 t + \phi),\ \ U = \frac{1}{2}kx^2$.

Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$,

με λύση την: $x = x_0 e^{-\frac{t}{4\tau}}\sin(\omega t + \phi)$, όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{16\tau^2}}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

$\boxed{M = \cancel{\frac{\mu_0 L}{6}}}$