Εξετάσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης
10 Σεπτεμβρίου 2010

Θέμα 1 (a) (i) Δώστε τον ορισμό της Hamel βάσης D ενός διανυσματικού χώρου X.
(ii Εστω D Hamel βάση του X και $D' \subset X$ ώστε το D' είναι γραμμικά ανεξάρτητο και κάθε $y \in D$ είναι γραμμικός συνδιασμός στοιχείων του D'. Δείξτε ότι το D' είναι Hamel βάση του X.
(iii Έστω D Hamel βάση του X και $y_0 \in D$. Ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο

$$D' = \{y_0\} \cup \{y + y_0 : y \neq y_0, y \in D\}$$

Χρησιμοποιώντας το (ii) δείξτε ότι το D' είναι Hamel βάση του X.

(b) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και D Hamel βάση του X.
(i) Αν $T, S : X \to Y$ γραμμικοί τελεστές με $T(x) = S(x)$ για κάθε $x \in D$, δείξτε ότι $T = S$.
(ii) Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με $T[D]$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε ο T είναι 1-1.

Θέμα 2 (a) Έστω H χώρος Hilbert. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στον H ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ $x_n \perp y_m$ και $x_n + y_n \to z$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in H$ τέτοια ώστε $x_n \to x$, $y_n \to y$ και $z = x + y$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες Cauchy.)

(b) Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονικό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H και $x \in H$. Θέτουμε $x' = \sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Δείξτε ότι:

(i) Αν $F =< e_1, \ldots, e_n >$ τότε $x - x' \perp F$.
(ii) $\|x'\| = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i >^2\big)^{1/2}$
(iii) $\|x'\| \leq \|x\|$.

(c) Βρείτε τον ορθογώνιο υπόχωρο καθενός από τους παρακάτω υποχώρους του $\ell^2(\mathbb{N})$.

(i) $F_1 =< \{e_n : n \in \mathbb{N}\} >$.
(ii) $F_2 =< \{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} >$.
(iii) $F_3 = \ker f$ όπου $f \in \ell^2(\mathbb{N})$, $f \neq 0$.

Θέμα 3 (α) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο της B_X. Ορίζουμε $T : X^* \to \ell_\infty$ με $T(x^*) = (x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική ισομετρία.

(β) Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\delta_t(f) = f(t)$.
(i) Δείξτε ότι $\delta_t \in (C[0,1], \| \|_\infty)^*$ και ότι $\|\delta_t\| = 1$.
(ii) Δείξτε ότι ο χώρος $(C[0,1], \| \|_\infty)^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.
(iii) Δείξτε ότι αν $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$, τότε $\cap_{n=1}^{\infty} ker\delta_{t_n} = \{0\}$.

Θέμα 4 (a) Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι $x \in X$

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) : \|x^*\| \leq 1\}$$

(b) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\|x_n\| = 1$ και για $n \neq m$ $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$.

(c) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε $x^* \in X^*$ ώστε $x^*|_Y = 0$ ισχύει $x^* = 0$. Δείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X.

Καλή επιτυχία.