ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Επαναληπτική εξέταση στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι,

5-9-2012

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει προβολή $P : X \to Y$. (με χρήση του θεωρήματος επέκτασης γραμμικών τελεστών).

(ii) Ο τελεστής $I - P : X \to X$ είναι προβολή.

(iii) $X = P[X] \bigoplus (I - P)[X]$ (δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχουν μοναδικά $y \in P[X]$, $z \in (I - P)[X]$ ώστε $x = y + z$).

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησιακά με $f, g \neq 0$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = \lambda g$.

(ii) Αν $T : X \to \mathbb{R}^2$ με $T(x) = (f(x), g(x))$ για κάθε $x \in X$, τότε ο T δεν είναι επί.

Θέμα 2. (α) Έστω τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ ώστε για $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_2$

$$T(\bar{x}) = (x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots).$$

Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και φραγμένος.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n - \text{φορές}}$$

Δείξτε ότι:

(i) Για $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_2$, $T^n(\bar{x}) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ (με χρήση μαθηματικής επαγωγής).

(ii) $\|T^n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} \|T^n(\bar{x})\| = 0$ για κάθε $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_2$.

Θέμα 3. (α) Διατυπώστε και αποδείξτε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

(β) Έστω χώρος Hilbert και $x, y \in H$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $x \perp y$

(ii) $\|x - y\| = \|x + y\|$

(iii) $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Θέμα 4. (α) (i) Δείξτε ότι για $t \in [0,1]$ το συναρτησοειδές Dirac $\delta_t : (C[0,1], \|\cdot\|_{\sup}) \to \mathbb{R}$ ($\delta_t(f) = f(t)$ για $f \in C[0,1]$) είναι γραμμικό και φραγμένο.

(ii) Δείξτε ότι για $t \in [0,1]$ το συναρτησοειδές Dirac $\delta_t : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο.

(β) (i) Δείξτε ότι αν $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ στο $[0,1]$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{t_i}\|_{\sup} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

(ii) Αν $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $[0,1]$ ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \delta_{t_n} = \{0\}$, δείξτε ότι η $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνή στο $[0,1]$.

Θέμα 5.(α)(i) Έστω X χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} x^*) > 1 - \varepsilon$.

(ii) Αν Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι:

(i) $\overline{Y} = \cap\{\operatorname{Ker} x^* : \ x^* \in X^*, \ Y \subset \operatorname{Ker} x^*\}$.

(ii) Αν $x_0 \in X$ και $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $Y \subset \operatorname{Ker} x^*$, τότε $|x^*(x_0)| \leq \operatorname{dist}(x_0, Y)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!