ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Εξέταση στη Συναρτησιακή Ανάλυση

16-9-2015

Θέμα 1. (α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.

(i) Πότε ένα $A \subseteq X$ ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο;

(ii) Αν ο T είναι 1-1 και $A \subseteq X$ γραμμικά ανεξάρτητο, να δειχθεί ότι και το $T[A]$ αποτελεί γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Y.

(iii) Αν $\dim X = m < \infty$, $\dim Y = n < \infty$ και $m > n$, να δειχθεί ότι $\operatorname{Ker} T \neq \{0_X\}$.

(β) Δίδονται τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 5x_2,\ x_3 = 2x_4\}, \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 = x_2^2,\ x_3 = x_4 = 0\}, \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Να εξετασθεί ποια από τα A_1, A_2, A_3 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να υπολογισθεί η διάστασή τους.

Θέμα 2. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και $T : (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \to X$ ώστε $\{T(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι:

(i) Ο T είναι φραγμένος.

(ii) $\|T\| = \sup\{\|T(e_n)\|_X : n \in \mathbb{N}\}$.

(β) Δείξτε ότι ο $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

(γ) Δείξτε ότι ο $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι ισομετρικός με τον $c_0(\mathbb{N})^*$.

Θέμα 3. Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H.

(i) Δώστε τον ορισμό του $F^\perp$ και δείξτε ότι ο $F^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε $x \in H$ γράφεται σαν $x = y + z$ με $y \in F$ και $z \in F^\perp$. Δείξτε ότι τα y, z είναι μοναδικά. (Διατυπώστε το θεώρημα που θα χρησιμοποιήσετε).

(iii) Δώστε τον ορισμό της ορθογώνιας προβολής $P : X \to F$. Δείξτε ότι η P είναι γραμμική, $\|P\| = 1$ και ότι ο $\operatorname{Ker}(P) = F^\perp$.

Θέμα 4. (α) Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, $Y \subseteq \operatorname{Ker} f$ και $f(x_0) = d(x_0, Y)$.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Θέτουμε $T : X^* \to Y^*$ με $Tf = f|_Y$. Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Ο T είναι γραμμικός και φραγμένος.

(ii) Ο T είναι επί.

(iii) Υπολογίστε τη νόρμα $\|T\|$ του T.

Θέμα 5. (α) Έστω X χώρος με νόρμα, $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in K^\circ$.

(i) Δώστε τον ορισμό του συναρτησιακού του Minkowski ρ_K του K.

(ii) Δείξτε τα ακόλουθα.

(1) $\rho_K(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

(2) $\rho_K(\lambda x) = \lambda \rho_K(x)$ για κάθε $\lambda > 0$ και $x \in X$.

(3) $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(iii) Δείξτε ότι το ρ_K είναι συνεχές.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και $D \subseteq B_X$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = \sup\{x^*(x) : x \in D\}$. Δείξτε ότι $B_X = \overline{\operatorname{conv}} D$ (χρησιμοποιείστε το διαχωριστικό θεώρημα).