Επαναληπτική Εξέταση Συναρτησιακής Ανάλυσης
14 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος.

(i) Αν B Hamel βάση του X και $x \in X$, τότε υπάρχουν μοναδικά $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $b_1, \dots, b_n \in B$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

(ii) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη Hamel βάση του X και ορίζουμε $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_1 = x_1$ και $y_n = x_n + x_1$ για κάθε $n \geq 2$. Να δειχθεί ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Hamel βάση του X.

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος και $0 \neq f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησιακά.

(i) Να δειχθεί ότι $\ker f_1 = \ker f_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f_1 = \lambda f_2$.

(ii) Αν $\ker f_1 \neq \ker f_2$, να δειχθεί ότι ο τελεστής $T : X \to \mathbb{R}^2$ με $T(x) = (f_1(x), f_2(x))$ για $x \in X$, είναι γραμμικός και επί.

Θέμα 2. (α) Έστω H χώρος Hilbert.

(i) Να δειχθεί ότι για $x \in H$ το συναρτησιακό $f_x : H \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) = \langle x, y \rangle$ είναι γραμμικό, φραγμένο και να υπολογίσετε τη $\|f_x\|$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$.

(iii) Δείξτε ότι ο τελεστής $T : H \to H^*$ με $T(x) = f_x$, για κάθε $x \in H$, είναι γραμμική ισομετρία.

(β) Έστω χώρος Hilbert, Y υπόχωρος του H, $x \in H$ και $y \in Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\}$.

(ii) $x - y \perp Y$.

Θέμα 3. (α) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στον X με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\forall n \neq m$, $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$.

(ii) Δείξτε ότι η μοναδιαία μπάλα του X δεν είναι συμπαγής.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \dots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του X.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει $x_i^* \in X^*$, ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.

(ii) Θέτουμε $Y = < x_1, \dots, x_n >$ και ορίζουμε $P : X \to Y$ με $P(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε τα εξής:

(1) Η P είναι γραμμική και συνεχής.

(2) Η P είναι προβολή στον Y.

Θέμα 4. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο $f[B(x_0, \varepsilon)]$ είναι συμμετρικό, ως προς το $f(x_0)$, διάστημα του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν $0 \notin f[B(x_0, \varepsilon)]$, δείξτε ότι το $f[B(x_0, \varepsilon)]$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν Ker$f$ είναι κλειστός, δείξτε ότι η f είναι συνεχής. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τα (i) και (ii)).

(β) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Να δειχθεί ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό και μη φραγμένο.