ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 3ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
22 Μαρτίου 2014

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) i) Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις $y_1(t)=t, y_2(t)=te^t$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για $-\infty<t<+\infty$.

ii) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0$.

Οι $y_1(t)=t, y_2(t)=te^t$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Διατυπώσατε σχετικό θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία λύσεων με γνωστή ορίζουσα και ελέγξατε το συμπέρασμα σε σχέση με τις δοθείσες λύσεις. Εξετάστε το συμπέρασμά σας στο διάστημα $2\le t$. (μον.1.25)

β) Να δοθεί η μορφή της λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y^{iv}-y=g(t)$, όπου $g(t)$ γνωστή συνάρτηση. (μον.1)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

Euler

α) Να αποδειχτεί και να δοθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $x^2y''-3xy'+4y=0, x>0$. (μον.0.75)

β) Για να χαρακτηριστεί το $x=\infty$ ως ομαλό ή ιδιάζον σημείο για τη διαφορική εξίσωση $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\xi=\dfrac{1}{x}$ και μελετάμε την προκύπτουσα εξίσωση στο $\xi=0$. Να διατυπώσετε τις συνθήκες ώστε το $x=\infty$ να είναι ομαλό σημείο για τη διαφορική εξίσωση. (μον.0.5)

γ) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $(x+2)(x+1)^2y''+3(x^2-1)y'+3y=0$. Να χαρακτηριστεί το $x_0=-1$ αν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο για την εξίσωση και αν είναι να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της λύσης σε μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0=-1$. (μον.0.5)

δ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση $y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(u)du=\cos t, y(0)=1$. (μον.1)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν σταθερές $a\in\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η δ. ε. $\left(ax^2y+y^2x\right)dx+\left(x+y\right)x^2\,dy=0$ να είναι ακριβής. Στη συνέχεια να λυθεί για κάθε τέτοια τιμή. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η λύση της δ. ε. $y=2x\dfrac{dy}{dx}+ln\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. (μον. 1)

γ) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'=\dfrac{ln|t\,y|}{1-t^2+y}$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. (μον. 0.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}'=A\cdot x$ όπου $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$L\left(t^n\right)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $L\left(\cos at\right)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $L\left(\sin at\right)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$, $L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)$, $L\left(u_a(t)f(t-a)\right)=e^{-sa}F(s)$,

αν $F(s)=L\left(f(t)\right)$ και $u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\ge a,\end{cases}$, $a\ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, **Καλή επιτυχία**