ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης ΤΑΞΗΣ

Τυπολόγιο & Μεθοδολογία

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Διαφορική εξίσωση (**Δ.Ε.**) ονομάζεται κάθε εξίσωση στην οποία εμφανίζονται παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης και ενδεχομένως η ίδια η συνάρτηση και η μεταβλητή της (ή οι μεταβλητές της).

π.χ. $x^2+y+(y')^2=1$

$$(xy^3+4x^3)dx+(3xy^2-3y^2)dy=0$$

• **Συνήθεις** Δ.Ε. ονομάζονται οι εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση είναι μίας μεταβλητής.

• **Τάξη** της διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων της $y'(x)$ που εμφανίζονται στην εξίσωση.

π.χ. η $y'''(x)+y''(x)-3y'(x)+y(x)=x$ είναι διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης.

• **Λύση – Ολοκλήρωμα** της διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

π.χ. Μια λύση της Δ.Ε. $y'(x)=x^2+5$ είναι η $y(x)=\frac{x^3}{3}+5x$.

• **Ολοκληρωτική καμπύλη** καλείται η γραφική παράσταση μιας λύσης της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

• **Γενική λύση - γενικό ολοκλήρωμα** της Δ.Ε. $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ ονομάζεται η λύση $\Phi(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ που περιέχει τις n το πλήθος αυθαίρετες σταθερές $c_1,c_2,\ldots,c_n$ (τόσες όσο και η τάξη της Δ.Ε.).

• **Μερική λύση** της Δ.Ε. καλείται η λύση που προκύπτει για συγκεκριμένες τιμές των σταθερών.

π.χ. Για την Δ.Ε. $y'(x)=x$ έχουμε:

$\Phi(x,y,c)=y-\frac{1}{2}x^2-c$ με **γενική λύση** την

$y(x)=\frac{1}{2}x^2+c$ και **μερική λύση** την

$y(x)=\frac{1}{2}x^2$ (για $c=0$).

• **Πρόβλημα αρχικών τιμών** (**Π.Α.Τ.**) ή **πρόβλημα Cauchy** ονομάζεται το πρόβλημα κατά το οποίο ζητείται να προσδιοριστεί μια λύση $y=\varphi(x)$ της Δ.Ε. που σε δοσμένο σημείο x_0 ικανοποιεί τις: $y_0=\varphi(x_0)$, $y_1=\varphi'(x_0)$, $y_2=\varphi''(x_0),\ldots,y_{n-1}=\varphi^{(n-1)}(x_0)$

• **Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης** λέγεται η εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση y=y(x) και την παράγωγό της $y'=y'(x)$.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ: $\boxed{F(x,y,y')=0}$ **(Ι)**

π.χ. $(1-y)xy'+y(1+x)=0$

Αν η Δ.Ε. είναι 1ης τάξης και το $y'(x)=\frac{dy}{dx}$ είναι πρωτοβάθμιο τότε:

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \quad \textbf{(ΙΙ)}$$

π.χ. $(x^2+xy+y^2)dx-x^2dy=0$

Δ.Ε. ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ & ΑΝΑΓΟΜΕΝΩΝ Σ΄ΑΥΤΕΣ

Χωριζόμενων μεταβλητών

Όταν η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή:

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0} \quad \textbf{(1)}$$

είναι άμεσα ολοκληρώσιμη, διότι χωρίζουν οι μεταβλητές.

Δηλαδή οι συντελεστές των dx, dy είναι γινόμενο συναρτήσεων μόνο του x ή του y.

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c$$

Ομογενείς Δ.Ε.

Μια Δ.Ε. της μορφής :

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \quad \textbf{(2)}$$

λέγεται ομογενής, όταν οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι ομογενείς βαθμού α ως προς x και y. Δηλαδή:

$$P(tx,ty)=t^{\alpha}P(x,y), \quad Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y)$$

π.χ. $(x^3+xy^2)dx+yx^2dy=0$

$$\left(1+\sin(y/x)\right)dx+\cos(y/x)dy=0$$

Θέτουμε: $\boxed{\frac{y(x)}{x}=z(x)}$

με $y'(x)=\frac{dy}{dx}=z(x)+xz'(x)$

και η Δ.Ε. **(2)** ανάγεται σε χωριζομένων μεταβλητών.

Αναγόμενες σε ομογενείς Δ.Ε.

Όταν η Δ.Ε. είναι της μορφής:

$$\boxed{y'=f\left(\frac{\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1}{\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2}\right)} \quad \textbf{(3)}$$

τότε ανάγεται σε ομογενή.

Θέτουμε: $\boxed{x=x_0+u, \quad y=y_0+v}$

όπου x_0, y_0 η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(Σ)}$$

και αναγόμαστε σε ομογενή Δ.Ε.

Όταν το **(Σ)** δεν έχει μοναδική λύση θέτουμε:

$$\boxed{\alpha_1x+\beta_1y=z(x) \ \text{ή} \ \alpha_2x+\beta_2y=z(x)}$$

και αναγόμαστε σε χωριζόμενων μεταβλητών.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. & ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ

Γραμμικές Δ.Ε. 1ης τάξης

Όταν η Δ.Ε. είναι της μορφής :

$$\boxed{y'(x)+f(x)y(x)=g(x)} \quad \textbf{(4)}$$

τότε λέμε ότι είναι γραμμική.

Δηλαδή πρωτοβάθμια ως προς τους y(x), y΄(x)

Η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. της **(4)** είναι:

$$\boxed{y'(x)+f(x)y(x)=0} \quad \textbf{(5)}$$

Η γενική λύση της **(4)** είναι:

$$\boxed{y_{\Gamma}(x)=y_o(x)+y_{\mu}(x)}$$

όπου: $y_o(x)$ η γενική λύση της ομογενούς και $y_{\mu}(x)$ μια μερική λύση της **(4)**.

Η γενική λύση της **(4)** δίνεται από:

$$\boxed{y(x)=e^{-\int f(x)dx}\left[c+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]}$$

π.χ. Η Δ.Ε. $y'\sin x+y\cos x=1$ έχει γενική λύση:

$$y_{\Gamma}(x)=e^{-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}\left[c+\int\frac{1}{\sin x}e^{\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}dx\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\Gamma}(x)=(c+x)/\sin x$$

Διαφορική εξίσωση Bernoulli

Όταν η Δ.Ε. είναι της μορφής:

$$\boxed{y'(x)+f(x)y(x)=g(x)y^p(x), \mu\varepsilon\ p\neq 0,1} \quad \textbf{(6)}$$

καλείται Δ.Ε. του **Bernoulli**.

Δηλαδή έχουμε δύο γραμμικούς όρους με τα $y(x), y'(x)$ *και έναν όρο με το* $y^p(x)$.

Θέτουμε: $\boxed{y^{1-p}(x)=z(x)}$

με $(1-p)y^{-p}(x)y'(x)=z'(x)$

Η **(6)** ανάγεται στην γραμμική Δ.Ε.:

$$\frac{z'(x)}{1-p}+f(x)z(x)=g(x)$$

Διαφορική εξίσωση Riccatti

Όταν η Δ.Ε. είναι της μορφής :

$$\boxed{y'(x)=f(x)y^2(x)+g(x)y(x)+h(x)} \quad \textbf{(7)}$$

τότε λέγεται Δ.Ε. **Riccatti**.

Δηλαδή η $y'(x)$ *είναι ίση με ένα τριώνυμο ως προς y(x).*

Μας **δίνεται** μια λύση $y_1(x)$ της **(7)** και

θέτουμε: $\boxed{y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}}$ **(Μ)**

με $y'(x)=y_1'(x)-\frac{z'(x)}{z^2(x)}$

Αναγόμαστε στην γραμμική Δ.Ε.

$$z'(x)+\left(2y_1(x)f(x)+g(x)\right)z(x)=-f(x)$$

την οποία λύνουμε και με αντικατάσταση στην **(Μ)** παίρνουμε τη γενική λύση της **(7)**.

ΠΛΗΡΕΙΣ Δ.Ε. & ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ

Πλήρης ή ακριβής Δ.Ε.

Μια Δ.Ε. που γράφεται στη μορφή :

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \qquad \textbf{(8)}$$

είναι πλήρης αν υπάρχει $\Phi(x,y)$:

$$d\Phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

• Πότε είναι πλήρης η Δ.Ε. (8);

Όταν ισχύει: $\boxed{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$

• Ποια είναι η λύση της (8);

Από $d\Phi(x,y)=0 \Rightarrow \boxed{\Phi(x,y)=c}$

Υπολογισμός της $\Phi(x,y)$:

1^{ος} τρόπος: Από τον τύπο:

$$\boxed{\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt}$$

όπου (x_0,y_0) σημείο του Π.Ο. των P, Q.

2^{ος} τρόπος: Από το διαφορικό σύστημα:

$$\Phi_x=P,\quad \Phi_y=Q$$

με ολοκλήρωση της μίας από τις δύο σχέσεις και αντικατάσταση στην άλλη.

Αναγόμενη σε πλήρη Δ.Ε.

Μια Δ.Ε. της μορφής :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

έχει πολλαπλασιαστή $\mu(x,y)$ (ολοκληρώνων παράγων ή πολλαπλασιαστής Euler) όταν ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y)) \Rightarrow$$

$$\boxed{P\mu_y-Q\mu_x=\mu(Q_x-P_y)} \qquad \textbf{(9)}$$

Τότε ανάγεται σε πλήρη Δ.Ε.

α) Πολλαπλασιαστής $\mu(x,y)=\mu(x)$

Δίνεται από τη σχέση: $\mu(x)=e^{-\int g(x)dx}$

και υπάρχει όταν: $\boxed{\dfrac{Q_x-P_y}{Q}=g(x)}$

β) Πολλαπλασιαστής $\mu(x,y)=\mu(y)$

Δίνεται από τη σχέση: $\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$

και υπάρχει όταν: $\boxed{\dfrac{Q_x-P_y}{P}=g(y)}$

γ) Πολλαπλασιαστής $\mu(x,y)=\mu(z)$

με $z=z(x,y)$ (π.χ. $z=xy$, $z=x+y$, $z=x^2+y^2$,κλπ)

Δίνεται από τη σχέση: $\mu(z)=e^{\int g(z)dz}$

και υπάρχει όταν: $\boxed{\dfrac{Q_x-P_y}{Pz_y-Qz_x}=g(z)}$

Δ.Ε. LAGRANGE & CLAIRAUT

Διαφορική εξίσωση Lagrange

Είναι της μορφής :

$$\boxed{y=xf(y')+g(y')} \qquad \textbf{(10)}$$

Θέτουμε: $\boxed{y'(x)=p(x)}$

Οπότε : $y''(x)=dp/dx$

Με παραγώγιση της **(10)** και αντικατάσταση παίρνουμε τη γραμμική Δ.Ε. ως προς $x(p)$:

$$\boxed{(p-f(p))\frac{dx(p)}{dp}-x(p)f'(p)=g'(p)} \qquad \textbf{(11)}$$

Η λύση της **(11)** είναι: $\boxed{x=x(p)}$

Έτσι έχουμε τη λύση της **(10)** σε παραμετρική μορφή :

$$\boxed{x=x(p),\quad y=x(p)f(p)+g(p)}$$

όπου p παράμετρος.

Διαφορική εξίσωση Clairaut

Είναι της μορφής : $\boxed{y=xy'+f(y')}$ **(12)**

Θέτουμε: $\boxed{y'(x)=p(x)}$

Οπότε : $y''(x)=dp/dx$

Με παραγώγιση της **(12)** και αντικατάσταση προκύπτει: $\dfrac{dp}{dx}(x+f'(p))=0$

α) Από $\dfrac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p(x)=c$

Η γενική λύση της **(12)** είναι: $\boxed{y=xc+f(c)}$

β) Από $x+f'(p)=0$ έχουμε την **ιδιάζουσα** λύση σε παραμετρική μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=-f'(p)\\ y&=xp+f(p)\end{aligned}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ Δ.Ε.

Μια Δ.Ε. 1^{ης} τάξης της μορφής:

$$\boxed{F(x,y,y')=0} \qquad \textbf{(13)}$$

μετασχηματίζεται σε ευκολότερη ως εξής:

α) Πολικές συντεταγμένες

Ο μετασχηματισμός είναι:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho(\theta)\cos\theta\\ y&=\rho(\theta)\sin\theta\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \rho&=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta&=\arctan(y/x)\end{aligned}\right.$$

Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\rho\tan\theta+\rho}{\rho'-\rho\tan\theta}$$

Οπότε η **(13)** με αντικατάσταση των παραπάνω γίνεται:

$$\boxed{F(\theta,\rho(\theta),\rho'(\theta))=0}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός χρησιμοποιείται συνήθως σε Δ.Ε. που υπάρχουν οι εκφράσεις x^2+y^2 ή $\arctan(y/x)$.

π.χ. στη Δ.Ε. $(x^2+y^2)(xy'-y)=yy'+x$

β) Εναλλαγή του ρόλου των x, y

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $x=x(y)$

Με παραγώγιση έχουμε: $\boxed{y'(x)=1/x'(y)}$

Οπότε η **(13)** με αντικατάσταση γίνεται:

$$\boxed{F(x(y),y,1/x'(y))=0}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός χρησιμοποιείται συνήθως σε απλές Δ.Ε. που ανάγονται σε γραμμικές ή Bernoulli.

γ) Παραμετρική Αντικατάσταση

Συνήθως δίνεται η: $\boxed{x=\varphi(t)}$

Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$y'(x)=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y'(t)}{\varphi'(t)}$$

Οπότε η **(13)** γίνεται:

$$\boxed{F(\varphi(t),y(t),y'(t)/\varphi'(t))=0}$$

δ) Ειδική μορφή

Όταν η Δ.Ε. είναι της μορφής :

$$\boxed{F(x,f(y),f'(y)dy/dx)=0} \qquad \textbf{(14)}$$

Θέτουμε: $\boxed{u(x)=f(y)}$

Οπότε $u'(x)=f'(y)dy/dx$

Με αντικατάσταση αναγόμαστε σε γραμμική Δ.Ε. ως προς $u(x)$.

Υποβιβασμός τάξης Δ.Ε.

Αν η Δ.Ε. είναι της μορφής:

$$\boxed{F(x,y'(x),y''(x))=0} \qquad \textbf{(15)}$$

Θέτουμε: $\boxed{y'(x)=u(x)}$

Οπότε $y''(x)=u'(x)$ και η **(15)** γίνεται:

$$\boxed{F(x,u(x),u'(x))=0}$$

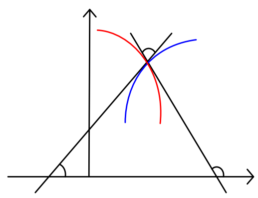
ΙΣΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Δίνεται η οικογένεια τροχιών:

$$\boxed{f(x,y,c)=0} \qquad \textbf{(16)}$$

Με παραγώγιση και απαλοιφή της σταθεράς c προκύπτει η Δ.Ε.:

$$\boxed{\Phi(x,y(x),y'(x))=0}$$



Οι ζητούμενες τροχιές που σχηματίζουν με την οικογένεια **(16)** γωνία φ, έχουν τα ίδια x, y(x) και κλίση (παράγωγο): $\dfrac{y'(x)-\tan\varphi}{1+y'(x)\tan\varphi}$

Έτσι η Δ.Ε. των ζητούμενων τροχιών είναι:

$$\boxed{\Phi\left(x,y,\frac{y'-\tan\varphi}{1+y'\tan\varphi}\right)=0}$$

Λύνοντας βρίσκουμε τις ισογώνιες τροχιές:

$$\boxed{g(x,y,c)=0}$$

Ορθογώνιες τροχιές

Από την πιο πάνω διαδικασία για φ=π/2 έχουμε τις ορθογώνιες τροχιές.

Συγκεκριμένα στην Δ.Ε. $\Phi(x,y,y')=0$ θέτουμε $x\to x$, $y(x)\to y(x)$ και $y'(x)\to -1/y'(x)$.

Έτσι η Δ.Ε. των ζητούμενων τροχιών είναι:

$$\boxed{\Phi(x,y,-1/y')=0}$$

που αν την λύσουμε βρίσκουμε την οικογένεια των ορθογώνιων τροχιών.

ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Οργανωμένα μαθήματα

Ε.Μ.Π. – Α.Ε.Ι. – Α.Τ.Ε.Ι. – Ε.Α.Π.

Επικοινωνήστε μαζί μας !!!