

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
 ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
 Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
 ΟΜΑΔΑ: Α

25 Ιανουαρίου, 2016

- Θ1. (α') Εστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \{\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < \xi\}$. Δείξτε ότι $\inf A = a$. (0,8 μον.)
 (β') Εστω $(a_n), (b_n), (c_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $c \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \leq c_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στο c , δείξτε ότι και η (c_n) συγκλίνει στο c . (0,8 μον.)
 (γ') Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $c_n = \sqrt[3]{2n^2 + 5n + 1}$. (0,4 μον.)

Λύση.

- (α) Απο τον ορισμό του A έχουμε ότι το a είναι κάτω φράγμα του A . Άρα το A είναι κάτω φραγμένο και συνεπώς υπάρχει το $\inf A$. Επειδή το $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A και το a είναι κάτω φράγμα του A , έχουμε ότι $a \leq \inf A$. Μένει τώρα να αποκλειστεί η περίπτωση $a < \inf A$. Πράγματι, αν $a < \inf A$ τότε απο την ιδιότητα της πυκνότητας των αρρήτων στο \mathbb{R} θα υπήρχε $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < \xi_0 < \inf A$. Άρα $\xi_0 \in A$ και $\xi_0 < \inf A$, άτοπο αφού το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και άρα μικρότερο ή ίσο κάθε στοιχείου του A .
- (β) Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Εστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η (a_n) συγκλίνει στο c υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon), \quad \text{για κάθε } n \geq n_1. \quad (1)$$

Ομοίως, αφού η (b_n) συγκλίνει στο c υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$b_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon), \quad \text{για κάθε } n \geq n_2. \quad (2)$$

Θέτουμε τώρα $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το n_0 είναι αυτός ο φυσικός που θέλουμε για το ε που επιλέξαμε. Πράγματι, για οποιοδήποτε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1, n_2$ και άρα ισχύουν οι (1) και (2). Ειδικότερα, $c - \varepsilon < a_n$ και $b_n < c + \varepsilon$. Επειδή επιπλέον $a_n \leq c_n \leq b_n$, έπεται ότι $c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$ και άρα $c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$, όπως επιθυμούμε.

- (γ') Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} n^2 \leq 2n^2 + 5n + 1 \leq 2n^2 + 5n^2 + n^2 = 8n^2 &\implies \sqrt[3]{n^2} \leq \sqrt[3]{2n^2 + 5n + 1} \leq \sqrt[3]{8n^2} \\ &\implies (\sqrt[3]{n})^2 \leq c_n \leq \sqrt[3]{8} (\sqrt[3]{n})^2. \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = 1$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a} = 1$ για κάθε $a > 0$. Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n})^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n})^2 = 1^2 = 1$ και ομοίως $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8} (\sqrt[3]{n})^2) = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8}) (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n})^2 = 1$. Απο τα παραπάνω και το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (προηγούμενο ερώτημα), έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

- Θ2. (α') Εστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\varepsilon > 0$. Αν για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a_n \geq \varepsilon$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει. (0,8 μον.)
 (β') Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α) Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε όπως γνωρίζουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς αν $a_n \geq \varepsilon$ τότε $n < n_0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι σημαίνει ότι το σύνολο όλων των $n \in \mathbb{N}$ με $a_n \geq \varepsilon$ είναι πεπερασμένο και όχι άπειρο όπως υποθέσαμε.

(β) Για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο ορίου λόγου συγκρίνοντας με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

και άρα αφού ως γνωστόν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ έχουμε ότι και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$.

Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1} < 1$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Τέλος, για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει.

■

Θ3. (α') Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in D$ μεμονωμένο σημείο του D . Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . (1 μον.)

(β') Είναι μια πραγματική ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής στο \mathbb{N} ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0,5 μον.)

Λύση.

(α') Επειδή το $x_0 \in D$ είναι μεμονωμένο σημείο του D , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D = \{x_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ αν $x \in D$ με $|x - x_0| < \delta$, τότε $x = x_0$ και κατά συνέπεια

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο μεμονωμένο σημείο x_0 του D .

(β') Κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του \mathbb{N} και επομένως η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, δηλαδή η συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο \mathbb{N} .

■

Θ4. Διατυπώστε το θεώρημα Darboux για παραγώγους.

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I . Δείξτε ότι το πλευρικό όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ δεν μπορεί να ισούται με $+\infty$. (1,5 μον.)

Λύση. Θεώρημα Darboux για παραγώγους: Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = c.$$

Έστω $f'(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$. Από τον ορισμό του ορίου από δεξιά της f' στο x_0 , για $M = f'(x_0) + 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset I$ να ισχύει $f'(x) \geq f'(x_0) + 1$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(x_0) \neq f'(x_0 + \delta)$ (γιατί;). Τότε από το Θεώρημα Darboux για κάθε c στο ανοικτό διάστημα J με άκρα τα $f'(x_0)$ και $f'(x_0 + \delta)$ υπάρχει $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ με $c = f'(\xi) \geq f'(x_0) + 1$. Επομένως το διάστημα $[f'(x_0) + 1, +\infty)$ θα περιέχει το ανοικτό διάστημα J και κατά συνέπεια θα περιέχει και τα άκρα του διαστήματος J . Τότε $f'(x_0) + 1 \leq f'(x_0) < +\infty$, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $f'(x_0+) = +\infty$. Άρα το $f'(x_0+)$ δεν ισούται με $+\infty$. ■

Θ5. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin για τη συνάρτηση $y = \cos x$, δείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ είναι.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \text{με σφάλμα μικρότερο του } 10^{-2}.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos \theta x}_{R_{2n-1}(x)},$$

για κάποιο $\theta \in (0, 1)$. Για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε

$$|R_{2n-1}(x)| = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} |\cos \theta x| \leq \frac{1}{(2n)!}.$$

Η ανισότητα

$$\frac{1}{(2n)!} < 10^{-2} \Leftrightarrow (2n)! > 100$$

ισχύει για κάθε $n \geq 3$. Επομένως, για $n = 3$ και για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε $|R_{2n-1}(x)| < 10^{-2}$. Άρα για κάθε $x \in [-1, 1]$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

με το σφάλμα της προσέγγισης μικρότερο του 10^{-2} . ■

Θ6. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2k^2 - 4kn}{k^2 - 2kn + 3n^2} = \int_0^1 \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 3} dx = 2 - 3\sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann είναι

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2k^2 - 4kn}{k^2 - 2kn + 3n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2(k/n)^2 - 4(k/n)}{(k/n)^2 - 2(k/n) + 3} \\ &= \int_0^1 \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 3} dx, \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 3}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 3} dx &= 2 \int_0^1 dx - 6 \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x + 3} dx \\ &= 2 - 6 \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2 + 2} dx \\ &= 2 - 6 \int_{-1}^0 \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + t^2} dt \quad (\text{αντικατάσταση } t = x - 1) \\ &= 2 - \frac{6}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{t=-1}^{t=0} \\ &= 2 - 3\sqrt{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες