ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 11/3/2015

Συνήθης Δ.Ε: $F(x,y,y',y'',..,y^{(n)})=0$ όπου $y=y(x)$, $I \to \mathbb{R}$.

$y^{(n)} = f(x,y,..,y^{(n-1)})$ λυμένη μορφή.

γραμμική: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + .. + a_0(x)y = f(x)$.

Μερικές Δ.Ε: $u(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, x_2, .., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$F(\underline{x}, u, u_{x_1}, u_{x_2}, .., u_{x_1x_1}, .., ..) = 0$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ 1ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ $\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$a_1(\underline{x})u_{x_1} + a_2(\underline{x})u_{x_2} + a_3(\underline{x})u = a_4(\underline{x})$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ $\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$a_1(\underline{x})u_{x_1x_1} + a_2(\underline{x})u_{x_2x_2} + a_3(\underline{x})u_{x_1x_2} + a_4(\underline{x})u_{x_2x_1} + a_5(\underline{x})u_{x_1} + a_6(x)u_{x_2} + a_7(\underline{x})u = f(\underline{x})$

(την $u_{x_2x_1}$ μπορώ να την αγνοήσω αφού θεωρώ C^2 λύσεις)

ΣΧΕΔΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ (γραμμική ως προς τους μεγιστοτάξιους όρους)
QUASI-LINEAR

ΣΧΕΔΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ 1ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ $\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$a_1(\underline{x},u)u_{x_1} + a_2(\underline{x},u)u_{x_2} + f(\underline{x},u) = 0$.

ΣΧΕΔΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ $\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$a_1(\underline{x},u,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_1x_1} + a_2(\underline{x},u,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_2x_2} + a_3(\underline{x},u,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_1x_2} + f(\underline{x},u,\nabla u) = 0$.

Στις γραμμικές, η πιο γενική μέθοδος (αρκεί να ξέρω μια λύση σε κάθε βήμα) είναι η D'Alembert.

<u>Βοηθητικές Συνθήκες</u> $y^{(n)} = f(x,\dots,y^{(n-1)})$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών $\Big)$: $\{y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}\}$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad , x\in(a,b).$$

Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών $\Big)$: $\left.\begin{aligned} y(a)+y'(a)&=y_1 \\ y(b)+y'(b)&=y_2 \end{aligned}\right\}$

<u>Εξίσωση κύματος</u> : $u_{xx} = \dfrac{1}{c^2}u_{tt} \to \nabla^2 u(x,t) = \dfrac{1}{c^2}u_{tt}$

$\Delta u(x,t) = \dfrac{1}{c^2}u_{tt}$

τελεστής Laplace (εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων)

<u>i) Άπειρη χορδή</u>

$\{u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\}$ αρχική συνθήκη

<u>ii) Πεπερασμένη χορδή</u> $x\in(a,b)$.

$\left.\begin{aligned} &u(a,t)=u(b,t)=0 \\ &u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) \end{aligned}\right\}$ αρχικές συνοριακές συνθήκες

$u(x_1,x_2,x_3)$

$\text{grad}\, u = \nabla u = (u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3})$

$\text{div}(\text{grad}\, u) = \nabla(u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3}) = u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$

άρα $\quad \nabla^2 \equiv \nabla(\nabla) \equiv \text{div}(\text{grad}) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}.$

Ταξινόμηση Ημιγραμμικών 2ης τάξης
(εξισώσεις μαθηματικής φυσικής)

18/3/2015

Γενική μορφή: $\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: $a(x_1,x_2)u_{x_1x_1} + 2b(x_1,x_2)u_{x_1x_2} + c(x_1,x_2)u_{x_2x_2} + d(\underline{x},u,\nabla u) = 0$

Δημιουργώ τον πίνακα της Μ.Δ.Ε.: $A\Big|_{(x_1^0,x_2^0)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

και $\det(A-\lambda I) = 0 \to \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2 - ac) = 0$

οι ρίζες $\in \mathbb{R}$ ως ρίζες πραγματικού και συμμετρικού πίνακα

- Αν λ_1, λ_2 ομόσημες (μη μηδενικές) $\Rightarrow$ εξίσωση ελλειπτικού τύπου
- Αν λ_1, λ_2 ετερόσημες $\Rightarrow$ εξίσωση υπερβολικού τύπου
- Αν λ_1, λ_2 μηδενική (και μία) $\Rightarrow$ εξίσωση παραβολικού τύπου.

Παράδειγμα: 1) $\Delta u(x_1,x_2) = \nabla^2 u(x_1,x_2) = \nabla\nabla u(x_1,x_2) = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$
Εξίσωση Laplace ελλειπτικού τύπου

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ • φαινόμενα που δεν έχουν χρονική εξάρτηση

2) $\Delta u(x,t) = \frac{1}{c^2} u_{tt} \Rightarrow u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$ εξίσωση κύματος υπερβολικού τύπου

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$ • έχουν χρονική εξάρτηση
• ανοι δυναμικά

3) $u_{xx} = \frac{1}{k} u_t$ εξίσωση διάχυσης/θερμότητας παραβολικού τύπου

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ • μεταβατικό φαινόμενο $\Rightarrow$ σταδιακή κατάσταση ανεξάρτητη του χρόνου π.χ. $x_1^2 u_{x_1x_1} + 8u_{x_2x_2} + (x_2^2+1)u_{x_3x_3} + 5u_{x_3} = 0$

4

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2+1 \end{pmatrix}$$

Αν $x_1 = 0 \rightsquigarrow$ ελλειπτική

Αν $x_1 \neq 0 \rightsquigarrow$ παραβολική

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

"Έχετε μέσα σας την έννοια της ορθογωνιότητας" – Κυριάκη

$$F(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

δεν γράφω = διότι πρέπει να έχω εξασφαλίσει τη σύγκλιση της σειράς.

Βασική Περίοδος $=2L$ $\quad (F(x) = F(x+2L))$

1ο βήμα: Προσδιορισμός Συντελεστών a_n & b_n

Σχέσεις Ορθογωνιότητας

π.χ. $\int_{-L}^{L} \cos\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi x}{L}\,dx = 0$

(1) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \cdot \sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \boxed{L\delta_{nm}}$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & , n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$\frac{n\pi x}{L} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2L}{n}$

$T = \frac{2L}{n}$

$\underline{a} = (2,3,5)$

$\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$2 = \underline{a}\cdot\hat{i}$

$\hat{i}\hat{i} = \hat{j}\hat{j} = \hat{k}\hat{k} = 1$

$\hat{i}\hat{j} = \hat{j}\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

$\phi_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$)

$\langle \phi_k, \phi_m \rangle \overset{\text{ορσ}}{=} \int_a^b \phi_k(x)\overline{\phi_m(x)}\,dx$

Εδώ: $1, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{L},$

$\sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{n\pi x}{L}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Συντελεστές Fourier-Euler

Ισοδύναμη γραφή:

② $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(c_n \cos\frac{n\pi x}{L} + d_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$

③ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_n \cos\frac{n\pi x}{L} + f_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + a_1 \cancel{\int_{-L}^{L} \cos\frac{\pi x}{L} dx} + \dots + b_1 \cancel{\int_{-L}^{L} \sin\frac{\pi x}{L} dx} + \dots \Rightarrow \frac{2La_0}{2} = \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Για τη ② $c_n = a_n,\ b_n = d_n$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}$$

Για την ③ $e_n = a_n,\ f_n = b_n,\ n = 1, \dots$

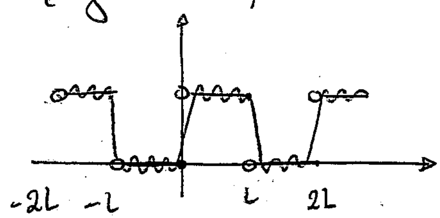
$$e_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Άσκηση (σ. 637)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$$

$f(x+2L) = f(x)$.

τετραγωνικό κύμα



$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\,dx = L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ \frac{2L}{n\pi}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι κοντά στο σημείο ασυνέχειας, η σειρά δυσκολεύεται να προσεγγίσει τη συνάρτηση (φαινόμενο Gibbs) σελ 22

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Ν.δ.ο. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (Σειρά Leibnitz).

Δίνεται ότι το ανάπτυγμα της $f(x) = \begin{cases} 0, & -L<x<0 \\ L, & 0<x<L \end{cases}$ είναι $\frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{L}\right]}{2n-1}$

τα $2n-1$ και $2n+1$ είναι ίδια απλά το πρώτο ξεκινά από 0 και το δεύτερο από 1.

το x μπορώ να το πάρω ό,τι θέλω, παίρνω $x = \frac{L}{2} \rightarrow \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{L}\right]}{2n-1} = \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi L}{2L}\right]}{2n-1}$

$$= \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Με την αντίστοιχη έναρξη του n έχουμε $= \frac{(-1)^n}{2n+1} \equiv$ Leibnitz

κατά στο $x = \frac{L}{2}$ έχουμε $f(x) \rightarrow L$ (το $\frac{L}{2}$ δεν είναι σημείο ασυνέχειας)

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις / Συνημιτονικά και Ημιτονικά αναπτύγματα Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

<u>f άρτια</u>: $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

άρα $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$.

<u>f περιττή</u>: $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

άρα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

Διπλή τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$f(x,y) = f(x+2L, y+2M)$$

Ποια βάση θα πάρω?

→ Στην απλή έχω $f(x) = f(x+2L)$

$$1, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos\frac{m\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{m\pi x}{L}, \dots$$

→ Συνεπώς εδώ θα πάρω

$$1, \cos\frac{\pi x}{L}, \dots, \cos\frac{m\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{m\pi x}{L}, \dots, \cos\frac{\pi y}{M}, \cos\frac{2\pi y}{M}, \dots, \cos\frac{m\pi y}{M}, \dots$$

$$\dots, \sin\frac{\pi y}{M}, \dots, \sin\frac{m\pi y}{M}, \dots, \cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{M}, \dots, \cos\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{5\pi y}{M}, \dots, \sin\frac{7\pi x}{L}\sin\frac{8\pi y}{M}$$

Άρα τελικά

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{nm} \Big(a_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M} + b_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L} + c_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}$$
$$+ d_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

Για να βρω συντελεστές $a_{nm}, b_{nm}, \dots$ Χρειαζόμαστε εσωτερικό γινόμενο (αφού πρόκειται για προβολές)

$$\Phi_n(x,y), \quad \Phi_m(x,y)$$

$$\boxed{\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \int_{-L}^{L}\int_{-M}^{M} \Phi_n(x,y)\,\Phi_m(x,y)\,dy\,dx}$$

$$a_{35} = \frac{\langle f, \cos\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{5ny}{M}\rangle}{\|\cos\frac{3nx}{L}\cos\frac{5ny}{M}\|^2 (=LM)} \qquad b_{03} = \frac{\langle f, \sin\frac{3ny}{M}\|}{\|\sin\frac{3ny}{M}\|^2 (=2LM)}$$ (8)

ΑΡΑ ΓΕΝΙΚΑ

$$a_{nm} = \frac{\langle f, \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}\rangle}{LM} \qquad b_{nm} = \frac{\langle f, \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}\rangle}{LM}$$

$$c_{nm} = \frac{\langle f, \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}\rangle}{LM}, \qquad d_{nm} = \frac{\langle f, \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}\rangle}{LM}$$

$$\varepsilon_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=m=0 \\ \frac{1}{2}, & (n=0 \text{ και } m\neq 0) \text{ ή } (n\neq 0 \text{ και } m=0) \\ 1, & n,m\neq 0 \end{cases}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} e^{i\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi y}{M}\right)}, \quad c_{nm} = \frac{1}{4LM}\int_{-L}^{L}\int_{-M}^{M} f(x,y) e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}+\frac{m\pi y}{M}\right)} dx dy$$

> Hilbert Space Methods / Young.

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ: $\|\phi_k\|^2 = \int_a^b \phi_k(x)\overline{\phi_k(x)}\,dx = 1$

$$\langle \phi_k, \phi_m\rangle = 0.$$

η τυχαία f γράφεται:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \phi_k(x) \quad \text{όπου} \quad c_k = \langle f, \phi_k\rangle. \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\| = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

$\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, c_k\rangle|$ (ανισότητα Bessel) υπόδειξη: $\langle S_n - f, S_n\rangle = 0$

Ισότητα Parseval: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) \Longrightarrow \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k\rangle|^2$

$$\|f\|^2 = \|f - S_n + S_n\|^2 = \|S_n\|^2 + \|S_n - f\|^2$$

> Κυματική Zachmanoff

- Τα υπαρξιακά προβλήματα είναι πολύ δύσκολα (μέθοδος Perron)
- Η μοναδικότητα είναι πιο απλή
- Εφόσον βρω μια λύση, έχω ξεπεράσει τα υπαρξιακά ζητήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ dirichlet

Πρόταση: Αν $u \in \Omega$, με $\left.\begin{array}{l}\Delta u(\underline{x}) = 0 \text{ στο } \Omega \\ u(\underline{x}) = 0 \text{ στο } \partial\Omega\end{array}\right\} \Rightarrow u = 0$ στο $\bar{\Omega}$.

1ος τύπος Green: $$\int_\Omega u \Delta v \, d\underline{x} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} \, d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS$$

2ος τύπος Green: $$\int_\Omega (u\Delta v - v \Delta u) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) dS$$

(ειδική μορφή του τύπου Lagrange)

απόδειξη

για $u = v$ στον 1ο τύπο Green: $$\int_\Omega u \underbrace{\Delta u}_{0 \text{ στο } \Omega} d\underline{x} = -\int_\Omega \sum u_{x_i}^2 d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u}_{0 \text{ στο } \partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sum_i u_{x_i}^2 d\underline{x} = 0 \rightarrow \sum_i u_{x_i}^2 = 0 \Rightarrow \underline{u_{x_i} = 0 \ \forall i}$$

Άρα u = σταθερή συνάρτηση, C^2, που μηδενίζεται στο σύνορο $\Rightarrow u(\underline{x}) = 0$ στο $\bar{\Omega}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

: Αν $u \in \Omega$ με $\Delta u(\underline{x}) = 0$ στο Ω
$u(\underline{x}) = f(\underline{x})$ στο $\partial\Omega$.

τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη: Έστω u_1, u_2: $\Delta u_1 = 0$ στο Ω, $u_1(\underline{x}) = f(\underline{x})$ στο $\partial\Omega$ και $\Delta u_2 = 0$ στο Ω, $u_2(\underline{x}) = f(\underline{x})$ στο $\partial\Omega$.

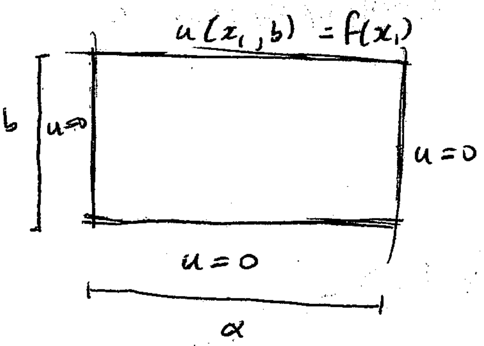
$w = u_1 - u_2 \rightarrow \left.\begin{array}{l}\Delta w = 0 \text{ στο } \Omega \\ w = 0 \text{ στο } \partial\Omega\end{array}\right\} \Rightarrow w = 0$ παντού, δηλαδή $u_1 = u_2$ στο $\bar{\Omega}$.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Για προβλήματα μόνο ειδικής γεωμετρίας. Υπάρχουν σχήματα που είναι ομοιωσες επιφάνειες συστημάτων συντεταγμένων (ορθογώνιο/καρτεσιανό σύστημα)

Ο διαφορικός τελεστής Laplace εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και τη μετρική του χώρου.

• ΠΛΑΚΑ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ



$$\Delta u(x_1,x_2)=0 \quad , 0<x_1<a, \; 0<x_2<b$$
$$u(0,x_2)=u(a,x_2)=u(x_1,0)=0$$
$$u(x_1,b)=f(x_1) \quad , f \text{ γνωστή}$$

Χωρισμός μεταβλητών: αναζητώ λύση της μορφής $u(x_1,x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2)$

αντικατάσταση: $\Delta u(x_1,x_2)=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=0 \Rightarrow X_1''(x_1)X_2(x_2)+X_2''(x_2)X_1(x_1)=0$

Διαιρώ με $X_1(x_1)X_2(x_2)$, (x_1,x_2) εσωτερικό σημείο

Αρχή Αναλυτικής Συνέχειας: αν $u(x_1,x_2)=0$ κάπου στο εσωτερικό, τότε $u(x_1,x_2)=0$ παντού άρα $u(x_1,x_2)\neq 0$ παντού στο εσωτερικό

$$\frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)}+\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)}=0 \rightarrow \frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)}=-\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)}=\underline{k} \quad \text{σταθερά χωρισμού}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & \boxed{\dfrac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)}=k \;, \; X_1(0)=X_1(a)=0} \\ (2) & \boxed{\dfrac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)}=-k \;, \; X_2(0)=0} \end{cases}$$

όπου οι Σ.Σ προκύπτουν:

$u(0,x_2)=0 \rightarrow X_1(0)X_2(x_2)=0 \rightarrow \underline{X_1(0)=0}$

$u(a,x_2)=0 \rightarrow \ldots \rightarrow \underline{X_1(a)=0}$

$u(x_1,0)=0 \rightarrow \ldots \underline{X_2(0)=0}$

Το (1) είναι κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville

α) $k>0$ $(k=\lambda^2)$ $\rightarrow X_1''(x_1)-\lambda^2 X_1(x_1)=0 \rightarrow X_1(x_1)=c_1e^{\lambda x_1}+c_2e^{-\lambda x_1}$

$X_1(0)=0 \rightarrow c_1+c_2=0 \quad X_1(a)=0 \rightarrow c_1e^{\lambda a}+c_2e^{-\lambda a}=0 \rightarrow c_1=c_2=0$
απορρίπτεται

$$a_1 \sinh\frac{\pi}{a} b \sin\frac{\pi}{a}x_1 + a_2 \sinh\frac{2\pi}{a} b \sin\frac{2\pi}{a}x_1 + \dots = f_1 \sin\frac{\pi}{a}x_1 + f_2 \sin\frac{2\pi}{a}x_2 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1\sinh\frac{\pi}{a}b\cdot\int_{-a}^{a}\left(\sin\frac{\pi}{a}x_1\right)^2dx_1 + a_2\sinh\frac{\pi}{a}b\cancel{\int_{-a}^{a}\sin\frac{\pi}{a}x_1\cdot\sin\frac{2\pi}{a}x_1\,dx_1} + \dots =$$

$$= f_1\int_{-a}^{a}\left(\sin\frac{\pi}{a}x_1\right)^2dx_1 + f_2\cancel{\int_{-a}^{a}\sin\frac{2\pi}{a}x_1\sin\frac{\pi}{a}x_1\,dx_1} + \dots$$

$$\Rightarrow a_1\sinh\frac{\pi}{a}b\cdot a = f_1 a \Rightarrow a_1\sinh\frac{\pi}{a}b = f_1$$

Έτσι $\boxed{a_n\sinh\frac{n\pi b}{a} = f_n}$ λόγω ορθογωνιότητας

$$\boxed{u(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x_1\,\sinh\frac{n\pi}{a}x_2}$$

Βρήκα λύση, και λόγω του Θ. Μοναδικότητας για προβλήματα Dirichlet είναι μοναδική.

Η σύγκλιση της σειράς όμως δεν είναι εξασφαλισμένη!

Έστω $f\in C^{(4)}$. Αν φράξω τον γενικό όρο της από μια σειρά που συγκλίνει έχω εξασφαλίσει τη σύγκλιση.

$$\left|\frac{f_n}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\underbrace{\sin\frac{n\pi}{a}x_1}\,\sinh\frac{n\pi}{a}x_2\right| \le |f_n|\left|\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}x_2}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\right|$$

όμως $\sinh \nearrow$ άρα $\sinh\frac{n\pi}{a}b \ge \sinh\frac{n\pi}{a}x_2 \quad \forall\ x_2\in[0,b]$

άρα $\left|\frac{f_n}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x_1\sinh\frac{n\pi}{a}x_2\right| \le |f_n|$

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x_1)\sin\frac{n\pi}{a}x_1\,dx_1 = \frac{2}{a}\left(-\frac{a}{n\pi}\right)\int_0^a f(x_1)\,d\left(\cos\frac{n\pi}{a}x_1\right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[f(x_1)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x_1\right)\Big|_0^a - \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}x_1\right)f'(x_1)\,dx_1\right]$$

① Sturm-Liouville

α) $k>0$ $(k=\lambda^2)$: $X_1''(x_1)-\lambda^2 X_1(x_1)=0 \to X_1(x_1)=c_1e^{\lambda x_1}+c_2e^{-\lambda x_1}$

$X_1(0)=0 \to c_1+c_2=0$ και $X_1(3)=0 \to c_1=c_2=0$ απορρίπτεται

β) $k=0$: $X_1''(x_1)=0 \to X_1(x_1)=c_1x_1+c_2$

$X_1(0)=0 \to c_2=0$ και $X_1(3)=0 \to c_1=0$ απορρίπτεται.

γ) $k<0$ $(k=-\lambda^2)$ $X_1(x_1)=c_1\cos\lambda x_1+c_2\sin\lambda x_1$

$X_1(0)=0 \to c_1=0$ και $X_1(3)=0 \to \lambda=\frac{n\pi}{a}$

υπολογίζω και το $X_2(x_2)$ και

άρα $u(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{3}x_1 \sinh\frac{n\pi}{3}x_2$

$u(x_1,4)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{3}x_1 \sinh\frac{n\pi}{3}.4$

Δεν χρειάζεται καν να αναπτύξω κατά Fourier, αφού η $u(x_1,4)$ είναι ήδη εκφρασμένη σε ημίτονα. $\left(u(x_1,4)=5\sin\frac{8\pi}{3}x_1+3\sin\frac{3\pi}{3}x_1\right)$

Λόγω ορθογωνιότητας: $a_n=0 \quad \forall \quad n\neq 3,8$

και $a_8\sinh\frac{8\pi}{3}.4=5$ και $a_3\sinh\frac{3\pi}{3}.4=3.$

Τελικά $$\boxed{u(x_1,x_2)=\frac{5}{\sinh\frac{8\pi}{3}.4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}x_1\times\sinh\frac{8\pi}{3}x_2+\frac{3}{\sinh\frac{3\pi}{3}.4}\sin\pi x_1\cdot\sinh\pi x_2}$$

$$u(x_1,x_2,c) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x_1 \sin\frac{m\pi}{b}x_2 \sinh\gamma_{nm} c = f(x_1,x_2)$$

Με ανάπτυξη Fourier $f(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x_1 \sin\frac{m\pi}{b}x_2$

όπου $f_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x_1,x_2)\sin\frac{n\pi}{a}x_1 \sin\frac{m\pi}{b}x_2\, dx_1 dx_2$

Λόγω ορθογωνιότητας, $a_{nm}\sinh\gamma_{nm} c = f_{nm} \leadsto \boxed{a_{nm} = \frac{f_{nm}}{\sinh\gamma_{nm} c}}$

$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = 0$, $0<x_1<2$, $0<x_2<3$, $0<x_3<4$

$u(0,x_2,x_3) = u(2,x_2,x_3) = u(x_1,0,x_3) = u(x_1,3,x_3) = u(x_1,x_2,0) = 0$

$u(x_1,x_2,4) = \sin n\pi x_1 \sin 2\pi x_2$

$> u(x_1,x_2,4) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{n\pi}{2}x_1 \sin\frac{m\pi}{3}x_2 \sinh\gamma_{nm}4 = \sin\pi x_1 \sin 2\pi x_2 =$

$= \sin\frac{2\pi}{2}x_1 \cdot \sin\frac{6\pi x_2}{3}$

λόγω ορθογωνιότητας $a_{nm} = 0 \quad \forall (n,m) \neq (2,6)$

με $a_{26} = \frac{1}{\sinh\gamma_{26}4}$ όπου $\gamma_{26} = \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{6\pi}{3}\right)^2 = \pi^2 + 4\pi^2 = 5\pi^2$

άρα η λύση τελικά: $u(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{\sinh(4\sqrt{5}\pi)}\sin\pi x_1 \sin 2\pi x_2 \sinh\sqrt{5}\pi x_3$

$$w(x_1,x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2) \rightsquigarrow \frac{X_1''}{X_1} + \frac{X_2''}{X_2} = 0 \rightsquigarrow \frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)} = -\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)} = \kappa$$ 14

$X_1(x_1) = \sin\frac{n\pi}{2}x_1$ (ως Sturm-Liouville)

$$\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)} = +\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \rightsquigarrow X_2(x_2) = \begin{cases} \cosh\frac{n\pi}{2}x_2 \\ \sinh\frac{n\pi}{2}x_2 \end{cases}$$

άρα $w(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{2}x_1\left[a_n\cosh\frac{n\pi}{2}x_2 + b_n\sinh\frac{n\pi}{2}x_2\right]$

$$w(x_1,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi}{2}x_1 = -3x_1(x_1-2) \underset{\text{Fourier}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin\frac{n\pi}{2}x_1$$

όπου $f_n = \frac{2}{2}\int_0^2 [-3x_1(x_1-2)]\sin\frac{n\pi}{2}x_1\,dx_1 \xrightarrow{\text{ορθογ.}} \underline{a_n = f_n}$

$$w(x_1,3) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}x_1\left(a_n\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot 3 + b_n\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot 3\right) = -3x_1(x_1-2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin\frac{n\pi}{2}x_1 \overset{\text{ορθογ.}}{\rightsquigarrow} \underline{a_n\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot 3 + b_n\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot 3 = f_n}$$

<u>Παράδειγμα</u> : $\Delta u(x_1,x_2) = 6$

$u(0,x_2) = u(2,x_2) = u(x_1,0) = 0$ (Τρεις ομογενείς Σ.Σ.)

$u(x_1,3) = 5x_1$ (Μια μη ομογενής Σ.Σ)

τώρα αναγκαστικά $v = 3x_1(x_1-2)$

και τ'άλλα η ίδια διαδικασία!

$$\frac{\rho^2 P''(\rho)+\rho P'(\rho)}{P(\rho)}=k=n^2 \to \underline{\rho^2 P''(\rho)+\rho P'(\rho)-n^2 P(\rho)=0}$$ Εξίσωση Euler

$\boxed{\rho=e^t}$ $\quad t=\ln\rho \quad \frac{dt}{d\rho}=\frac{1}{\rho}$

$$\frac{dP}{d\rho}=\frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt}, \quad \frac{d^2P}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt}\right)=\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2P}{dt^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dt}$$

Άρα $\frac{d^2P}{dt^2}-\cancel{\frac{dP}{dt}}+\cancel{\frac{dP}{dt}}-n^2P=0 \to \frac{d^2P}{dt^2}-n^2P=0 \to P=\begin{cases} e^{nt}=\rho^n \\ e^{-nt}=\rho^{-n}\end{cases}$

$\underline{k=0}$ $\quad \frac{d^2P}{dt^2}=0 \to P=\begin{cases} 1 \\ t=\ln\rho\end{cases}$

	$\Phi(\phi)$	$P(\rho)$	1ο $P(\rho)$	2ο $P(\rho)$	3ο $P(\rho)$
$k=0$	1	1, $\ln\rho$	1	1	1, $\ln\rho$
$k=-n^2$, $n=1,2$	$\cos n\phi$, $\sin n\phi$	ρ^n, ρ^{-n}	ρ^n	ρ^{-n}	ρ^n, ρ^{-n}

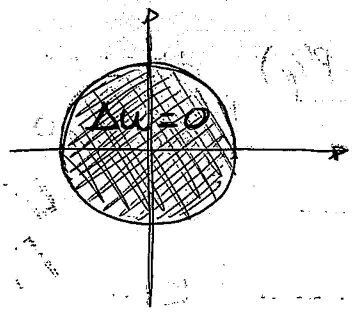
1ο πρόβλημα: $1, \rho^n$ (όχι ρ^{-n} γιατί δεν ορίζονται στο 0
ούτε $\ln\rho$ ———)

2ο: όχι το $(\rho^n, \ln\rho)$ γιατί θέλω $|u|\le c$ στην περιοχή του απείρου

$\underline{\underline{1ο}}$: $u(\rho,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)\rho^n$

$$u(a,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)a^n=f(\phi)=\frac{f_0^{(1)}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n^{(1)}\cos n\phi+f_n^{(2)}\sin n\phi$$

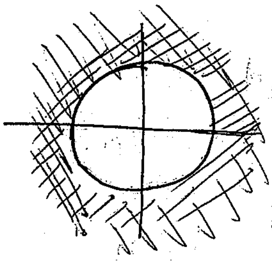
$$\begin{cases} a_n a^n=f_n^{(1)} \\ b_n a^n=f_n^{(2)}\end{cases}$$



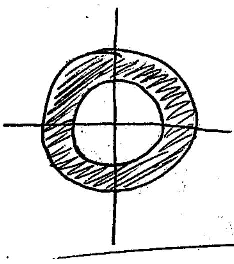
$$u(a,\phi)=f(\phi)$$

$$u(\rho,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi\right)$$

$$f(\phi)=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n^{(1)}\cos n\phi+f_n^{(2)}\sin n\phi\right)$$



$$u(\rho,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi\right)\rho^{-n}$$



$$u(\rho,\phi)=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n\rho^n+b_n\rho^{-n}\right)\cos n\phi+\left(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n}\right)\sin n\phi\right]$$

Poisson

$\Delta u(\rho,\phi)=3\rho^2\cos\phi$, $1<\rho<2$

$u(1,\phi)=0$, $u(2,\phi)=\sin\phi$

$\hookrightarrow u(\rho,\phi)=w(\rho,\phi)+v(\rho,\phi)$ με $\Delta w=0$

$\Delta v=3\rho^2\cos\phi$

Ψάχνω μια <u>ειδική λύση</u> της μη ομογενούς $\Delta v=3\rho^2\cos\phi \Longrightarrow v(\rho,\phi)=A\rho^4\cos\phi$

και αντικαθιστώντας : $12A\rho^2\cos\phi+4A\rho^2\cos\phi-A\rho^2\cos\phi=3\rho^2\cos\phi$

$\Longrightarrow 15A\rho^2\cos\phi=3\rho^2\cos\phi \Longrightarrow \underline{A=1/5} \longrightarrow v(\rho,\phi)=\frac{1}{5}\rho^4\cos\phi$

> Να λύνω το μη ομογενές σε πολικές είναι πιο εύκολο γιατί δεν με νοιάζει η Sturm-Liouville!

$w(1,\phi)=u(1,\phi)-v(1,\phi)=-\frac{1}{5}\cos\phi$

$w(2,\phi)=u(2,\phi)-v(2,\phi)=\sin\phi-\frac{1}{5}2^4\cos\phi$

Αντίστοιχα, για $k=0$ $\quad \frac{d^2P}{dt^2}=0 \to P(t) \begin{cases} 1 \\ t \end{cases}$

Επομένως

$$w(\rho,\phi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})\cos n\phi + (c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})\sin n\phi\right]$$

$$w(1,\phi) = a_0 + b_0\ln 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n+b_n)\cos n\phi + (c_n+d_n)\sin n\phi\right] = -\frac{1}{5}\cos\phi$$

$$w(2,\phi) = a_0 + b_0\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n 2^n + b_n 2^{-n})\cos n\phi + (c_n 2^n + d_n 2^{-n})\sin n\phi\right]$$

$$= \sin\phi - \frac{1}{5}2^4\cos\phi$$

λόγω ορθογωνιότητας

$$a_0 + b_0\ln 1 = 0 \to \boxed{a_0 = 0}$$

$$a_n + b_n = 0 \quad \forall n \neq 1$$

$$a_1 + b_1 = -\frac{1}{5}$$

$$c_n + d_n = 0 \quad \forall n$$

$$\boxed{a_0 + b_0 \ln 2 = 0}$$

$$a_n 2^n + b_n 2^{-n} = 0 \quad \forall n \neq 1$$

$$a_1 2 + b_1 2^{-1} = -\frac{1}{5}2^4$$

$$c_n 2^n + d_n 2^{-n} = 0 \quad \forall n \neq 1$$

$$c_1 2 + d_1 2^{-1} = 1$$

$$\boxed{a_0 = b_0 = 0}$$

$$\boxed{a_n = b_n = 0}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις, μπορώ να υπολογίσω ΟΛΟΥΣ τους συντελεστές!

→ Αν είχα $\Delta u(\rho,\phi) = 3\rho^2\cos 3\phi$, $u(1,\phi)=0$, $u(2,\phi)=\sin\phi$

$u = w + v$ $\quad \Delta w = 0$, $\Delta v = 3\rho^2\cos 3\phi \to v = A\rho^4\cos 3\phi$

τότε $(12A + 4A - 9A)\rho^2\cos 3\phi = 3\rho^2\cos 3\phi \to A = \frac{3}{7}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

Το πρόβλημα Neumann αν επιλύεται, έχει μοναδική λύση σε μια προσθετική σταθερά

Απόδειξη: Έστω w_1, w_2

$$\Delta w_1 = 0 \qquad \Delta w_2 = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial n} = g(\underline{x}) \qquad \frac{\partial w_2}{\partial n} = g(\underline{x})$$

Αν $w = w_1 - w_2 \Rightarrow \Delta w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{w = c}} \Rightarrow \underline{\underline{w_1 = w_2 + c}}$

Συνθήκη Συμβατότητας (κάνω έλεγχο πάντα)

$$\Delta u(\underline{x}) = 0 \quad , \underline{x} \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(\underline{x}) \quad , \underline{x} \in \partial\Omega$$

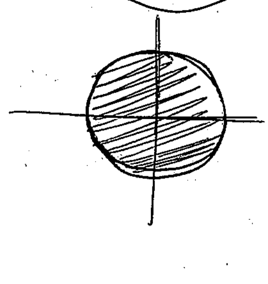
$\left(\underset{\sim}{\hat{n}} \nabla u(\underline{x}) = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ κατευθυνόμενη παράγωγος} \right)$

$$\int_\Omega \underbrace{\cancel{\Delta u(\underline{x})}}_{=0} d\underline{x} = \int_\Omega \nabla \cdot \nabla u(\underline{x}) d\underline{x} \overset{\text{Gauss}}{=\!=} \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\hat{n}} \cdot \nabla u(\underline{x}) dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} g(\underline{x}) dS$$

άρα δίνεται $\int_{\partial\Omega} g(\underline{x}) dS = 0$

Αν είχα Poisson, $\Delta u(\underline{x}) = f(\underline{x})$ τότε $\int_{\partial\Omega} g(\underline{x}) dS = \int_\Omega f(\underline{x}) d\underline{x}$.

$$\Delta u(\rho, \phi) = 0 \quad , 0 < \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi$$



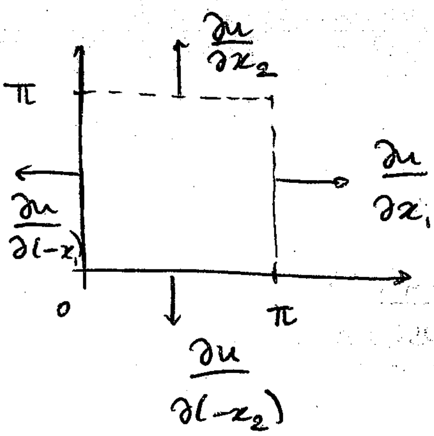
$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \phi) = f(\phi)$$

$$\int_\Omega \Delta u(\underline{x}) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \underbrace{\Delta u(\rho, \phi)}_{0} \rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \rho}}_{f(\phi)} a \, d\phi \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{θα} \\ \text{δίνεται}\end{matrix}\right)$$

27/5/2015

19



$$\Delta u(x_1,x_2)=0$$

$$\left.\begin{aligned} &u_{x_1}(0,x_2)=x_2-\tfrac{\pi}{2}\\ &u_{x_1}(\pi,x_2)=0\\ &u_{x_2}(x_1,0)=0\\ &u_{x_2}(x_1,\pi)=0 \end{aligned}\right\}\ \text{Neumann}$$

<u>Συνθήκη Συμβιβαστότητας</u> $\displaystyle\int_0^\pi \left(x_2-\frac{\pi}{2}\right)dx_2 \overset{?}{=} 0$ ✓ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\,dS$$

$$u(x_1,x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2)\longrightarrow \frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)}=-\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)}=k$$

$$X_1'(\pi)=X_2'(0)=X_2'(\pi)=0$$

$$\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)}=-k$$

i) $k>0\to k=k_1^2\to X_2(x_2)=c_1\cos k_1x_2+c_2\sin k_1x_2$

$$X_2'(x_2)=-c_1k_1\sin k_1x_2+k_1c_2\cos k_1x_2$$

$X_2'(0)=0\to c_2=0$

$X_2'(\pi)=0\to k_1\pi=n\pi\to \underline{\underline{k_1=n}}$

ii) $k=0\to X_2''(x_2)=0\to X_2(x_2)=c_1x_2+c_2$, $X_2'(x_2)=c_1$

$$\left.\begin{aligned} &X_2'(0)=0\to c_1=0\\ &X_2'(\pi)=0\to c_1=0\end{aligned}\right\}\ \text{άρα}\ X_2(x_2)=1\ \left(\text{η } c_2 \text{ θα απορροφηθεί}\right)$$

iii) $k<0\to k=-k_1^2\to X_2(x_2)=c_1\cosh k_1x_2+c_2\sinh k_1x_2$

$$X_2'(x_2)=k_1c_1\sinh k_1x_2+c_2k_1\cosh k_1x_2$$

$X_2'(0)=0\to c_2=0$

$X_2'(\pi)=0\to c_1=0$ X

Χωρισμός Μεταβλητών Σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$\Delta u(\rho,\phi,z)=0 \quad, 0\le\rho<a,\ 0\le\phi<2\pi,\ 0<z<b.$

$u(a,\phi,z)=u(\rho,\phi,0)=0.$

$u(\rho,\phi,b)=f(\rho,\phi)$ γνωστή συνάρτηση

$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi}+u_{zz}=0 \qquad u(\rho,\phi,z)=P(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$

τότε $\dfrac{\rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)}{P(\rho)}+\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}+\rho^2\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}=0$

> 2π – περιοδικότητα ως προς ϕ

$\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=k$

i) $k>0 \to k=k_1^2 \to \Phi(\phi)$ — $\cancel{e^{k_1\phi}}$, $\cancel{e^{-k_1\phi}}$

ii) $k=0 \to \Phi(\phi)$ — 1 ✓, $\cancel{\phi}$

iii) $k<0 \to k=-k_1^2 \to \Phi(\phi)$ — $\cos k_1\phi$, $\sin k_1\phi$ $\qquad k_1=n=1,2,..$

!! Θέτω $\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda^2 \to Z(z)=\begin{cases}\cosh\lambda z\\ \sinh\lambda z\end{cases}$ (δεν αναμένω περιοδικότητα ως προς z)

Επομένως έχω $\Phi(\phi)$ — $\cos n\phi$, $\sin n\phi$ $\quad n=0,1,..\quad$ $Z(z)$ — $\cosh\lambda z$, $\sinh\lambda z$

τότε $\dfrac{\rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)}{P(\rho)}-n^2+\rho^2\lambda^2=0 \to \rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)+(\rho^2\lambda^2-n^2)P(\rho)=0$

Θέτω $x=\lambda\rho$: $\dfrac{dP}{d\rho}=\dfrac{dP}{dx}\dfrac{dx}{d\rho}=\lambda\dfrac{dP}{dx} \qquad \dfrac{d^2P}{d\rho^2}=\dfrac{d}{d\rho}\left(\lambda\dfrac{dP}{dx}\right)=\lambda^2\dfrac{d^2P}{dx^2}$

άρα $\rho^2\lambda^2\dfrac{d^2P}{dx^2}+\lambda\rho\dfrac{dP}{dx}+(\lambda^2\rho^2-n^2)P=0$

$\Rightarrow x^2\dfrac{d^2P}{dx^2}+x\dfrac{dP}{dx}+(x^2-n^2)P=0$ <u>Bessel</u>

λόγω ορθογωνιότητας $\sinh \frac{\lambda_{nm}}{a} b\, a_{nm} = f_{nm}^{(1)}$, $\sinh \frac{\lambda_{nm}}{a} b \cdot b_{nm} = f_{nm}^{(2)}$

$$\Delta u(\rho,\phi,z) = 0 \quad , 0 \le \rho < 3 \quad , 0 \le \phi < 2\pi, \ 0 < z < 4.$$

$$u(3,\phi,z) = u(\rho,\phi,0) = 0$$

$$u(\rho,\phi,4) = 4 J_3(\lambda_{34} \tfrac{\rho}{3}) \cos 3\phi + 6 J_4(\lambda_{42} \tfrac{\rho}{3}) \sin 4\phi$$

$$u(\rho,\phi,z) = P(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$$

$$u(\rho,\phi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}\tfrac{\rho}{3})(a_{nm}\cos n\phi + b_{nm}\sin n\phi)\sinh \tfrac{\lambda_{nm}}{3} z$$

$$u(\rho,\phi,4) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}\tfrac{\rho}{3})(a_{nm}\cos n\phi + b_{nm}\sin n\phi)\sinh \tfrac{\lambda_{nm}}{3}\cdot 4 \equiv$$

$$= 4 J_3(\lambda_{34}\tfrac{\rho}{3})\cos 3\phi + 6 J_4(\lambda_{42}\tfrac{\rho}{3})\sin 4\phi$$

λόγω ορθογωνιότητας

$$a_{nm} = 0 \quad \forall (n,m) \ne (3,4) \quad \text{με} \quad a_{34} = \frac{4}{\sinh \frac{\lambda_{34}}{3}\cdot 4}$$

$$b_{nm} = 0 \quad \forall (n,m) \ne (4,2) \quad \text{με} \quad a_{42} = \frac{6}{\sinh \frac{\lambda_{42}}{3} 4}$$

$\boxed{\text{Εξίσωση Legendre}}$ $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$

$P_n(x)$ πολυωνυμικές λύσεις της Legendre.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad n=0,1,\ldots \quad (\text{εξ. Rodrigues})$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nk}$$

$Q_n(x)$ συναρτήσεις Legendre 2ου είδους

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-y}\,dy,\quad Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad Q_1(x)=P_1(x)Q_0(x)-1$$

Συσχετισμένη (ή προσαρτημένη) εξ. Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0.$$

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),\quad m=0,1,\ldots$$

$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x),\quad m=0,\ldots n.$$

Σχέσεις ορθογωνιότητας $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nk}$

$$\int_{-1}^{1}P_n^{m}(x)P_k^{m}(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nk}$$

Θέτω $x=\cos\vartheta$.

$$\frac{d\Theta}{d\vartheta}=\frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\vartheta}=-\sin\vartheta\frac{d\Theta}{dx},\quad \frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2}=-\cos\vartheta\frac{d\Theta}{dx}-\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)=$$

$$=-\cos\vartheta\frac{d\Theta}{dx}+\sin^2\vartheta\frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

$$u(a,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a^n [a_{nm}\cos m\phi + b_{nm}\sin m\phi] P_n^m(\cos\theta) = f(\theta,\phi)$$

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm}^{(1)}\cos m\phi + f_{nm}^{(2)}\sin m\phi] P_n^m(\cos\theta)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\,dx = -\int_{\pi}^{0} P_n^m(\cos\theta) P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{2n+1}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\delta_{nk}$$

$$f_{nm}^{(1)} = \frac{(2n+1)(n+m)!}{2(n-m)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\cos m\phi\, P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$f_{nm}^{(2)} = \frac{(2n+1)(n+m)!}{2(n-m)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\sin m\phi\, P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

ορθογωνιότητα : $a^n a_{nm} = f_{nm}^{(1)}$ ...

$f_{21}^{(2)} = ?$

πολ/ζω με $P_2^1(\cos\theta)\sin\phi\, f(\theta,\phi)$ και ολοκληρώνω :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_2^1(\cos\theta)\sin\phi\, f(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[f_{nm}^{(1)}\cos m\phi + f_{nm}^{(2)}\sin m\phi] P_n^m(\cos\theta)\sin\phi\, P_2^1(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= f_{21}^{(2)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[P_2^1(\cos\theta)]^2(\sin\phi)^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$

$$= f_{21}^{(2)}\underbrace{\int_0^{\pi}[P_2^1(\cos\theta)]^2\sin\theta\,d\theta}_{\frac{2}{2\cdot 2+1}\frac{(2-1)!}{(2+1)!}}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,d\phi}_{=\pi}$$