Η ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΉ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΏΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αργύρης Φελλούρης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Στις σύντομες σημειώσεις που ακολουθούν θα περιγράψουμε την αξιωματική θεμελίωση των δύο βασικών αλγεβρικών δομών των μαθηματικών. Αυτές είναι το σώμα των πραγματικών και το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Το σώμα των πραγματικών αριθμών έχει χρησιμοποιηθεί από του μαθητές στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, χωρίς να έχει εισαχθεί ο πλήρης αξιωματικός ορισμός του, ενώ για το σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν υπάρχει την τελευταία χρονιά διδασκαλία έστω και εισαγωγική στο Λύκειο. Εδώ θα ασχοληθούμε με τις πολύ βασικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών που μπορεί να χρειαστούν στους φοιτητές σε διάφορα μαθήματα, αλλά και ως βασική εισαγωγή για το μάθημα των μιγαδικών συναρτήσεων. Οι αποδείξεις των διαφόρων θεωρημάτων δίνονται για λόγους πληρότητας και κυρίως για χρήση από τους φοιτητές που ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για τα μαθηματικά. Για μία λεπτομερή εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών μπορείτε να μελετήσετε το βιβλίο του Λυκείου:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, ΟΕΔΒ, όπου θα βρείτε αρκετές ασκήσεις για εξάσκηση.

1. Οι πραγματικοί αριθμοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ο ορισμός του συνόλου $\mathbb{R}$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος οφείλεται στο Γερμανό μαθηματικό George Cantor περί το 1872 και αφορά την κατασκευή του $\mathbb{R}$ από το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με διαδοχικές επεκτάσεις, πρώτα στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακέραιων αριθμών, ύστερα στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και τελικά στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Μία άλλη παραπλήσια θεωρία, αυτή των «τομών» αναπτύχθηκε από τον Richard Dedekind περί το 1858, χωρίς όμως να δημοσιευτεί μέχρι το 1872.

Ο δεύτερος τρόπος εισαγωγής του συνόλου $\mathbb{R}$, τον οποίο και θα ακολουθήσουμε, συνίσταται σε μία αξιωματική θεμελίωση του συνόλου $\mathbb{R}$ μέσω τριών ομάδων αξιωμάτων. Η πρώτη ομάδα αφορά ***τις αλγεβρικές ιδιότητες*** του $\mathbb{R}$ και το περιγράφει ως ένα αλγεβρικό σώμα. Η δεύτερη ομάδα αφορά τη διάταξη στο $\mathbb{R}$, το οποίο πλέον γίνεται «***ολικά διατεταγμένο σώμα***», ενώ η τρίτη ομάδα αποτελείται από ***το αξίωμα της πληρότητας*** το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη των άρρητων αριθμών.

1.1 Οι αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Δεχόμαστε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα αλγεβρικό σώμα, δηλαδή είναι εφοδιασμένο με δύο **εσωτερικές πράξεις**

$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(\alpha,\beta)\to\alpha+\beta$ (**πρόσθεση**),

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(\alpha,\beta)\to\alpha\cdot\beta\,(ή\,\alpha\beta)$, (**πολλαπλασιασμός**),

οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες (αξιώματα):

Α1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **(αντιμεταθετική ιδιότητα),**

Α2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ **(προσεταιριστική ιδιότητα),**

Α3. υπάρχει στοιχείο $0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha+0=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$,

Α4. για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, υπάρχει στοιχείο $-\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha+(-\alpha)=0$.

Α5. $\alpha\beta=\beta\alpha$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **(αντιμεταθετική ιδιότητα),**

Α6. $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ **(προσεταιριστική ιδιότητα),**

Α7. υπάρχει στοιχείο $1\in\mathbb{R}-\{0\}$ τέτοιο ώστε: $1\cdot\alpha=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$,

Α8. για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ υπάρχει στοιχείο $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\alpha\alpha^{-1}=1$,

Α9. $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ **(επιμεριστική ιδιότητα).**

Το στοιχείο 0 ονομάζεται ***μηδέν*** *ή* ***μηδενικό στοιχείο*** *ή* ***ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*** και λόγω του (Α1) έχουμε $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Το στοιχείο $1\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ***μονάδα*** *ή* ***ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού*** και λόγω του (Α5) έχουμε $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Το στοιχείο $-\alpha\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ***αντίθετο*** στοιχείο του $\alpha\in\mathbb{R}$ και λόγω του (Α1) έχουμε $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$, ενώ το στοιχείο $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ***αντίστροφο*** του $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ και λόγω του (Α5) ισχύει ότι $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$. Επιπλέον είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε τα δύο θεμελιώδη θεωρήματα που ακολουθούν:

Θεώρημα 1. 1. 1. (i) *Τα στοιχεία* $0\in\mathbb{R}$ *και* $1\in\mathbb{R}$ *είναι μοναδικά.*

(ii) *Κάθε στοιχείο* $\alpha \in \mathbb{R}$ *έχει μοναδικό αντίθετο στοιχείο στο* $\mathbb{R}$.
(iii) *Κάθε στοιχείο* $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ *έχει μοναδικό αντίστροφο στο* $\mathbb{R}$.
(iv) *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *η εξίσωση* $\alpha + x = \beta$ *έχει μοναδική λύση στο* $\mathbb{R}$, *την* $x = (-\alpha) + \beta$.
(v) *Για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *η εξίσωση* $\alpha x = \beta$ *έχει μοναδική λύση* $x = \alpha^{-1}\beta$ *στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.
(i) Αν υπάρχει $0' \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $0' + \alpha = \alpha + 0' = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε λόγω του (Α3) θα ισχύει $0' = 0 + 0' = 0'$.

Αν υπάρχει $e \in \mathbb{R}-\{0\}$ τέτοιο ώστε $\alpha e = e\alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε λόγω του (Α7) θα έχουμε $1 = 1 \cdot e = e$.

(ii) Αν για το $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha = 0$, τότε

$(-\alpha) + (\alpha + \alpha_1) = (-\alpha) + 0$

$\Rightarrow [(-\alpha) + \alpha] + \alpha_1 = (-\alpha) + 0$, λόγω του (Α2),

$\Rightarrow 0 + \alpha_1 = (-\alpha) + 0$, λόγω του (Α4),

$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha$, λόγω της (Α4).

(iii) Αν για το $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ υπάρχει $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha\alpha_1 = 1$, τότε

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \alpha_1) = \alpha^{-1} \cdot 1$$

$$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\alpha_1 = \alpha^{-1} \cdot 1, \text{ λόγω του (Α6).}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \alpha_1 = \alpha^{-1} \cdot 1, \text{ λόγω του (Α8)}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha^{-1}, \text{ λόγω του (Α7).}$$

(iv) Επειδή ισχύει

$$\alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0 + \beta = \beta,$$

το στοιχείο $(-\alpha) + \beta$ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha + x = \beta$. Αν το $x_1 \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης $\alpha + x = \beta$, τότε

$$\alpha + x_1 = \beta \Rightarrow (-\alpha) + (\alpha + x_1) = (-\alpha) + \beta$$

$$\Rightarrow [(-\alpha) + \alpha] + x_1 = (-\alpha) + \beta \; [\text{λόγω (Α2)}].$$

$$\Rightarrow x_1 = (-\alpha) + \beta = x, \; [\text{λόγω(Α4) και (Α3)}]$$

(v) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν της (iv).

Θεώρημα 1. 1. 2 *Για κάθε* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *ισχύουν:*

(i) $\alpha\cdot 0=0$, **(ii)** $(-1)\cdot\alpha=-\alpha$, **(iii)** $-(-\alpha)=\alpha$, **(iv)** $(-1)\cdot(-1)=1$,

(v) Αν $\alpha\neq 0$, τότε $\alpha^{-1}\neq 0$ *και* $\left(\alpha^{-1}\right)^{-1}=\alpha$.

(vi) *Αν* $\alpha\neq 0$ *και* $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$, *τότε* $\beta=\gamma$ ***(ιδιότητα διαγραφής).***

(vii) *Αν* $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ *ή* $\beta=0$.

Απόδειξη.
(i) Επειδή $\alpha\cdot 1=\alpha$, λόγω των (Α9) και (Α3) έχουμε
$$\alpha+\alpha\cdot 0=\alpha\cdot 1+\alpha\cdot 0=\alpha\cdot(1+0)=\alpha\cdot 1=\alpha.$$
Επίσης ισχύει ότι $\alpha+0=\alpha$, οπότε λόγω της μοναδικότητας της λύσης της εξίσωσης $\alpha+x=\alpha$, έπεται ότι $\alpha\cdot 0=\alpha$.

(ii) Λόγω των (Α9), (Α7) και (Α4) έχουμε
$$\alpha+(-1)\cdot\alpha=1\cdot\alpha+(-1)\cdot\alpha=\left[1+(-1)\right]\cdot\alpha=0\cdot\alpha=\alpha\cdot 0=0.$$
Επίσης $\alpha+(-\alpha)=0$, οπότε, λόγω της μοναδικότητας του αντίθετου στοιχείου, προκύπτει ότι $-\alpha=(-1)\cdot\alpha$.

(iii) Από τις ισότητες $(-\alpha)+\alpha=0$, $(-\alpha)+\left[-(-\alpha)\right]=0$ και την μοναδικότητα του αντίθετου στοιχείου προκύπτει ότι $-(-\alpha)=\alpha$.

(iv) Από το (ii) για $\alpha=-1$ και το (iii) έπεται ότι $(-1)\cdot(-1)=-(-1)=1$.

(v) Επειδή $\alpha\neq 0$ υπάρχει το στοιχείο $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$. Αν είναι $\alpha^{-1}=0$, τότε
$$1=\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha\cdot 0=0,$$
που είναι άτοπο γιατί αντίκειται στο (Α7). Άρα είναι $\alpha^{-1}\neq 0$ και από την ισότητα $\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$ και την μοναδικότητα του αντίστροφου στοιχείου έπεται ότι
$\left(\alpha^{-1}\right)^{-1}=\alpha$.

(vi) Επειδή $\alpha\neq 0$ υπάρχει το στοιχείο $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \beta) = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \gamma)$$
$$\Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \gamma$$
$$\Rightarrow 1 \cdot \beta = 1 \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma.$$

(vii) Αν $\alpha = 0$, τότε το ζητούμενο είναι αληθές. Αν είναι $\alpha \neq 0$, τότε υπάρχει το $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \beta) = \alpha^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η εξίσωση $\alpha + x = \beta$ έχει μοναδική λύση $x = (-\alpha) + \beta = \beta + (-\alpha)$, την οποία συμβολίζουμε με $\beta - \alpha$ και την ονομάζουμε διαφορά «β μείον α». Έτσι μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ μία εσωτερική πράξη, την αφαίρεση, μέσω της ισότητας

$$\beta - \alpha := \beta + (-\alpha).$$

Όμοια η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ με $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}$, την οποία συμβολίζουμε με $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ή $\beta : \alpha$ και την ονομάζουμε « πηλίκο β δια α ».

1. 2 Τα αξιώματα διάταξης του $\mathbb{R}$.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο P του $\mathbb{R}$, το οποίο ονομάζουμε σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(Δ1) *αν* $\alpha, \beta \in \mathrm{P}$, *τότε* $\alpha + \beta \in \mathrm{P}$,
(Δ2) *αν* $\alpha, \beta \in \mathrm{P}$, *τότε* $\alpha \cdot \beta \in \mathrm{P}$,
(Δ3) *αν* $\alpha \in \mathbb{R}$, *τότε ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$\alpha \in \mathrm{P}, \quad \alpha = 0, \quad -\alpha \in \mathrm{P}.$$

Η τελευταία λέγεται και ***ιδιότητα της τριχοτομίας***, γιατί διαμερίζει το $\mathbb{R}$ σε τρία υποσύνολα P, $-\mathrm{P} := \{-\alpha : \alpha \in \mathrm{P}\}$ και το μονοσύνολο $\{0\}$. Τα στοιχεία του συνόλου P λέγονται ***θετικοί αριθμοί***, ενώ τα στοιχεία του συνόλου $-\mathrm{P}$ λέγονται ***αρνητικοί αριθμοί***. Λόγω του (Δ3) τα σύνολα P και $-\mathrm{P}$ δεν έχουν κοινά στοιχεία. Χρησιμοποιούμε επίσης και τους συμβολισμούς

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\},\ \mathbb{R}_+^* = \mathrm{P}, \qquad \mathbb{R}_-^* = -\mathrm{P},$$
$$\mathbb{R}_+ = \mathrm{P} \cup \{0\},\ \mathbb{R}_- = -\mathrm{P} \cup \{0\},\ \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}.$$

Με χρήση του συνόλου P μπορούμε να ορίσουμε τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ως εξής:
(i) $\alpha > 0$, αν, και μόνον αν, $\alpha \in \mathrm{P}$, δηλαδή, αν ο α είναι θετικός αριθμός.
(ii) $\alpha < 0$, αν, και μόνον αν, $-\alpha \in \mathrm{P}$, δηλαδή, αν ο α είναι αρνητικός αριθμός.

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ μία ***σχέση (ολικής) διάταξης*** που συμβολίζεται με $\geq$ και ορίζεται ως εξής:
$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathrm{P} \text{ ή } \alpha = \beta \quad (\Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{R}_+),$$
αφού εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $\alpha \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ***(αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα,)***
(ii) $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$, ***(αντισυμμετρική ιδιότητα,)***
(iii) $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$, ***(μεταβατική ιδιότητα),***
(iv) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:
$$\alpha \geq \beta \text{ ή } \beta \geq \alpha, \text{ ***(ιδιότητα ολικής διάταξης.***}$$

Μία ακόμη σχέση ολικής διάταξης στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta \geq \alpha .$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε δύο βασικά θεωρήματα σχετικά με τα αξιώματα διάταξης στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1. 2. 1 (i) *Αν* $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$*, τότε* $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha \in \mathrm{P}$*, δηλαδή* $\alpha^2 > 0$.
(ii) $1 > 0$.

Απόδειξη.
(i) Επειδή είναι $\alpha \neq 0$, από την ιδιότητα της τριχοτομίας θα είναι $\alpha \in \mathrm{P}$ ή $-\alpha \in \mathrm{P}$. Αν είναι $\alpha \in \mathrm{P}$, τότε από το (Δ2) θα είναι $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha \in \mathrm{P}$, ενώ αν είναι $-\alpha \in \mathrm{P}$, τότε
$$(-\alpha)(-\alpha) = -[\alpha \cdot (-\alpha)] = -[-(\alpha \cdot \alpha)] = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \mathrm{P}.$$
(ii) Ισχύει: $1 = 1^2 > 0$, λόγω της (i) •

Θεώρημα 1. 2. 2 *Για κάθε* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *ισχύουν:*
(i) *αν* $\alpha > \beta$*, τότε* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$,
(ii) *αν* $\alpha > \beta$ *και* $\gamma > \delta$*, τότε* $\alpha + \gamma > \beta + \delta$,

(iii) $\alpha\nu\ \ \alpha > \beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma > 0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha\gamma > \beta\gamma$,
(iv) $\alpha\nu\ \ \alpha > \beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma < 0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha\gamma < \beta\gamma$,
(v) $\alpha\nu\ \ \alpha > 0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha^{-1} > 0,\ \varepsilon\nu\acute{\omega}\ \alpha\nu\ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha < 0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha^{-1} < 0$.

Απόδειξη.
Είναι αρκετά απλή και αφήνεται ως άσκηση.

Σημειώνουμε ακόμη ότι η ***απόλυτη τιμή*** του πραγματικού αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}$ συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται από

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $|\alpha| = |-\alpha|$ και $|\alpha| \geq \alpha$, **(ii)** $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ και $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|},\ \beta \neq 0$,

(iii) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, **(iv)** $|\alpha| \leq \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon \leq \alpha \leq \varepsilon$,

(v) $|\alpha| \geq \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \varepsilon$ ή $\alpha \geq \varepsilon$.

2.3 Οι φυσικοί αριθμοί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Είναι γνωστό ότι ο άνθρωπος για πολλούς αιώνες αντιλαμβανόταν διαισθητικά το μέτρημα ή τους φυσικούς αριθμούς ως μία ακολουθία αντικειμένων που λαμβάνεται με πρόσθεση σε κάθε βήμα ενός ακόμη αντικειμένου. Για παράδειγμα

$$\{\ ,\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IIII},\mathrm{IIIII},\mathrm{IIIIII},...\}\ \text{ή}\ \{\ ,\mathrm{o},\mathrm{oo},\mathrm{ooo},\mathrm{oooo},\mathrm{ooooo},\mathrm{oooooo},...\}.$$

Ο παραπάνω συμβολισμός απλοποιήθηκε με τα χρόνια στο γνωστό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

$$\{0,1,2,3,4,5,6,...\}.$$

Η πρώτη επιτυχής προσπάθεια για τη μαθηματική θεώρηση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και ειδικότερα του υποσυνόλου του $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$ έγινε από τον Ιταλό μαθηματικό Peano (1852-1932) μέσω μιας ομάδας αξιωμάτων τα οποία ουσιαστικά βασίζονται στην παραπάνω εποπτική θεώρηση του $\mathbb{N}$. Τα αξιώματα αυτά, με μία μικρή διαφοροποίηση για να συμπεριλάβουν και το 0, είναι τα εξής:

(N1) $0 \in \mathbb{N}$ *και* $1 \in \mathbb{N}$,
(N2) *για κάθε* $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$,

(N3) *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$ *ισχύει ότι:* $n+1>1$,
(N4) *αν* $n, m \in \mathbb{N}$, *και* $n+1=m+1$, *τότε* $n=m$,
(N5) ***αξίωμα της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής***:
αν για το υποσύνολο S *του* $\mathbb{N}$ *ισχύουν*:
(i) $0 \in S$ *και* **(ii)** *για κάθε* $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$, *τότε* $S=\mathbb{N}$.

Επανερχόμαστε στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών για να διαπιστώσουμε ότι αυτό περιέχει ένα υποσύνολο που ταυτίζεται με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Πράγματι, αν ορίσουμε $2:=1+1$, τότε $2 \in \mathbb{R}$ και επειδή είναι $1>0$, από το θεώρημα 2.2.2(i) έχουμε $1+1>1+0$ ή $2>1>0$.

Όμοια ορίζουμε $3:=2+1 \in \mathbb{R}$ και από 2>1 προκύπτει 2+1>1+1 ή 3>2.

Με αυτόν τον τρόπο για κάθε αριθμό που έχουμε ορίσει μπορούμε να ορίσουμε και τον επόμενό του, οπότε έτσι κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano και κατά συνέπεια μπορούμε να το ταυτίσουμε με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Το αξίωμα (N5) είναι η ***αρχή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής*** και αποτελεί μέθοδο απόδειξης προτάσεων οι οποίες αληθεύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Έχουμε σχετικά:

Θεώρημα 1.3.1 ***(Αρχή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής)***.
Έστω $\mathrm{P}(n)$ *μία πρόταση, όπου* $n \in \mathbb{N}$. *Έστω ακόμη ότι*

$$S:=\{n : n \in \mathbb{N} \text{ και } \mathrm{P}(n) \text{ αληθής}\}$$

και επιπλέον ισχύουν: (i) $0 \in S$ και (ii) αν $k \in S$, τότε $k+1 \in S$.
Τότε θα είναι $S=\mathbb{N}$, *δηλαδή η πρόταση* $\mathrm{P}(n)$ *αληθεύει για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

Απόδειξη.
Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος (N5). •

Θεώρημα 1.3.2 (*Καλής διάταξης*)
Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ *έχει ελάχιστο στοιχείο, ως προς τη διάταξη που κληρονομεί από το* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.
Έστω $S \neq \varnothing$ υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Τότε για το σύνολο

$$\mathrm{A}=\{n : n \in \mathbb{N} \text{ και } \mathrm{T}_n \cap S=\varnothing\},$$

όπου $\mathrm{T}_n := \{0,1,2,\ldots,n\}$, ισχύουν:

(i) $0 \in \mathrm{A}$, γιατί, αν $0 \notin \mathrm{A}$, τότε $0 \in S$ και $0 = \min S$ που αντίκειται στην υπόθεση.

(ii) αν $n \in \mathrm{A}$, τότε $n+1 \in \mathrm{A}$.

Πράγματι, αν $n \in \mathrm{A}$, τότε $0,1,2,\ldots,n \notin \mathbb{N}$, οπότε, αν ίσχυε ότι $n+1 \in S$, τότε θα είχαμε ότι $n+1 = \min S$, που αντίκειται στην υπόθεσή μας.

Από τα (i) και (ii) και την αρχή της τέλειας επαγωγής έπεται ότι $\mathrm{A} = \mathbb{N}$, οπότε $S = \varnothing$, που είναι άτοπο.

Άρα το σύνολο S έχει ελάχιστο στοιχείο. •

Μέσω του θεωρήματος 1.3.2 μπορούμε να δώσουμε κάποιες εναλλακτικές μορφές της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, που είναι αναγκαίες για την απόδειξη προτάσεων οι οποίες εμφανίζουν αναδρομικούς τύπους ή δεν αληθεύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς, αλλά μόνο για αυτούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι προς κάποιο σταθερό φυσικό αριθμό n_0. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 1.3.3 *Έστω η πρόταση* $\mathrm{P}(n)$ *με* $n \in \{n_0, n_0+1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ *και υποθέτουμε ότι:*

(i) $\mathrm{P}(n)$ *αληθής και*

(ii) *αν* $\mathrm{P}(n)$ *αληθής για το τυχόν* $n > n_0$*, τότε* $\mathrm{P}(n+1)$ *αληθής.*

Τότε η πρόταση $\mathrm{P}(n)$ *είναι αληθής για κάθε* $n \geq n_0$.

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ και } \mathrm{P}(n) \text{ μη αληθής}\}.$$

Από την υπόθεση είναι $S \neq \varnothing$, οπότε από το θεώρημα 1.3.2 το S έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το m. Επειδή είναι $\mathrm{P}(n_0)$ αληθής, έπεται ότι $n_0 \notin S$, οπότε θα είναι $m > n_0$ και $m-1 \geq n_0$. Όμως $m = \min S$, οπότε $m-1 \notin S$, δηλαδή η πρόταση $\mathrm{P}(m-1)$ είναι αληθής. Λόγω της υπόθεσης θα είναι και η πρόταση $\mathrm{P}(m)$ αληθής, (άτοπο). Άρα το θεώρημα είναι αληθές. •

Θεώρημα 1.3.4 *Έστω η πρόταση* $\mathrm{P}(n)$ *με* $n \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι ισχύουν:*

(i) *η πρόταση* $\mathrm{P}(0)$ *είναι αληθής και*

(ii) *αν* $\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \ldots, \mathrm{P}(\kappa)$ *αληθείς, τότε και* $\mathrm{P}(\kappa+1)$ *αληθής.*

Τότε η πρόταση $\mathrm{P}(n)$ *είναι αληθής για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.
Είναι όμοια με αυτήν του θεωρήματος 1.3.3. •

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Απόδειξη. Για $n=1$ έχουμε $1=\frac{1\cdot 2}{2} \Leftrightarrow 1=1$, αληθής.

Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ισότητα αληθεύει για $n=k$, δηλαδή ισχύει

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2},\end{aligned}$$

δηλαδή η ισότητα ισχύει για $n=k+1$.

Άρα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η ζητούμενη ισότητα, θα αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα 2. Για $a>-1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \textbf{\textit{(ανισότητα Bernoulli)}}.$$

Απόδειξη.

Για $n=0$ έχουμε: $(1+a)^0 \geq 1+0a \Leftrightarrow 1=1$, που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$(1+a)^k \geq 1+ka. \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει και για $n=k+1$.

Πράγματι, αφού $a+1>0$, από την (1) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)&\Rightarrow(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a+ka^2\\&\Rightarrow(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a,\end{aligned}$$

αφού $ka^2>0$. Άρα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η ζητούμενη ανισότητα θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3. Οι συνδυασμοί των n στοιχείων ανά k, δηλαδή οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο με k στοιχεία μέσα από ένα σύνολο με n στοιχεία, δίνονται από

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

όπου $k = 0,1,2,...,n$ και $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ για $n \geq 1$ και $0! = 1$.

Να αποδειχθεί ότι

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \text{ για κάθε } k = 1,2,...,n.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k = 1,2,...,n$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. (Δυωνυμικό θεώρημα)

Αν $a,b \in \mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + ... + nab^{n-1} + b^n.$$

Απόδειξη. Για $n = 1$ έχουμε $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b \Leftrightarrow a+b = a+b,$ ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ισότητα ισχύει για $n = r,$ δηλαδή

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k.$$

Θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη ισότητα αληθεύει και για $n = r+1$. Πράγματι έχουμε

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{r+1} &= (a+b)(a+b)^r \\
&= a\left[\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k\right]+b\left[\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k+1}b^k+\sum_{k=1}^{r+1}\binom{r}{k-1}a^{r-k+1}b^k \\
&= a^{r+1}+\sum_{k=1}^{r}\left[\binom{r}{k}+\binom{r}{k-1}\right]a^{r-k+1}b^k+b^{r+1} \\
&= a^{r+1}+\sum_{k=1}^{r}\binom{r+1}{k}a^{r-k+1}b^k+b^{r+1}\text{[από παράδειγμα 4]} \\
&= \sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}a^{r-k+1}b^k.
\end{aligned}
$$

1.4 Τα σύνολα των ακεραίων και των ρητών αριθμών

Το σύνολο των ***ακέραιων αριθμών*** συμβολίζεται με το $\mathbb{Z}$ και περιέχει τους φυσικούς αριθμούς και τους αντίθετους τους, δηλαδή είναι

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Το σύνολο των ***ρητών αριθμών*** συμβολίζεται με το $\mathbb{Q}$ και είναι εκείνο το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς της μορφής $\alpha\beta^{-1} := \dfrac{\alpha}{\beta}$ (***κλάσμα*** με αριθμητή α και παρανομαστή β) με $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $\beta \in \mathbb{Z} - \{0\}$, δηλαδή είναι

$$\mathbb{Q} := \left\{x : x \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x = \frac{\alpha}{\beta} := \alpha\beta^{-1}, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}.$$

Μία πρώτη διαπίστωση είναι ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών περιέ-χει το σύνολο των ακέραιων αριθμών, αφού κάθε ακέραιος α μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 1^{-1} := \dfrac{\alpha}{1}$. Συνεπώς έχουμε μέχρι τώρα:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Μία δεύτερη διαπίστωση είναι ότι κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές παραστάσεις σε μορφή κλάσματος, όπως φαίνεται για τους $\alpha,\gamma\in\mathbb{Z}$ και $\beta,\delta\in\mathbb{Z}-\{0\}$ από την ισοδυναμία

$$\frac{\alpha}{\beta}\equiv\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma\,.$$

Για παράδειγμα ο ρητός αριθμός $2\cdot 3^{-1}\equiv\frac{2}{3}$ εκπροσωπεί στο σύνολο $\mathbb{Q}$ όλους τους αριθμούς της μορφής $\frac{2m}{3m}$, $m\in\mathbb{Z}-\{0\}=\mathbb{Z}^*$. Σε μία πιο αυστηρή μαθηματική θεώρηση, το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει στο $\mathbb{R}$ η ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$\alpha\beta^{-1}\sim\gamma\delta^{-1}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις και τη διάταξη που κληρονομεί από το $\mathbb{R}$ είναι ένα αλγεβρικό σώμα ολικά διατεταγμένο. Όμως το σύνολο $\mathbb{R}$ που θέλουμε να ορίσουμε θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε μέσα σε αυτό να είναι δυνατή η μέτρηση όλων των φυσικών μεγεθών. Έτσι είναι πλέον εύλογο το ερώτημα:

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ ταυτίζεται με το σύνολο $\mathbb{R}$ που προσπαθούμε να ορίσουμε; Η απάντηση βεβαίως είναι αρνητική, όπως είναι γνωστό από τον $6^{\text{ο}}$ αιώνα, όταν ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς μήκους μιας μονάδας δεν μπορεί να εκφραστεί ως πηλίκο δύο ακέραιων. Το ίδιο γίνεται ακόμη φανερό και από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1. 4. 1 *Δεν υπάρχει ρητός αριθμός* $x=\frac{m}{n}$ *τέτοιος ώστε* $x^2=2$.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχουν $m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*$ πρώτοι μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$. Τότε $m^2=2n^2$, οπότε ο m^2 είναι άρτιος ακέραιος. Άρα και ο m θα είναι άρτιος, γιατί αν ήταν περιττός, δηλαδή αν $m=2k+1,k\in\mathbb{Z}$, τότε και ο $m^2=(2k+1)^2=2\left(2k^2+2k\right)+1$ θα ήταν περιττός, (άτοπο).

Επομένως έχουμε $m=2k,k\in\mathbb{Z}$, οπότε από την υπόθεση προκύπτει ότι

$$(2k)^2=2n^2\Leftrightarrow 2k^2=n^2,$$

δηλαδή ο n^2 είναι άρτιος και κατά συνέπεια και ο n θα είναι άρτιος.

Όπως αποδείξαμε οι m, n είναι άρτιοι, οπότε $(m,n) > 1$, άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει ρητός που το τετράγωνό του ισούται με 2.

Από όσα είδαμε παραπάνω είναι φανερό ότι τα αξιώματα που έχουμε θέσει μέχρι τώρα δεν επαρκούν για τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε μέσα σε αυτό

(i) να είναι δυνατή η μέτρηση κάθε ευθύγραμμου τμήματος και

(ii) η εξίσωση $x^2 = \alpha, \alpha > 0,$ να έχει λύση.

Ένα ακόμη πρόβλημα σχετικό με τους πραγματικούς αριθμούς περιγράφεται με το περίφημο από την αρχαιότητα **παράδοξο του Ζήνωνα**.

Ο Αχιλλέας(Α) κυνηγάει να φθάσει τη χελώνα(Χ) που απέχει από αυτόν x_0 μέτρα. Όταν ο Αχιλλέας φθάνει στο σημείο που ξεκίνησε η χελώνα, τότε η χελώνα έχει προχωρήσει, έστω κατά x_1 μέτρα. Όμοια, όταν ο Αχιλλέας φθάνει στη καινούργια αφετηρία της χελώνας, τότε αυτή θα έχει προχωρήσει, έστω κατά x_2 μέτρα. Αυτή η συζήτηση μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρο και έτσι ο Αχιλλέας δεν μπορεί να πιάσει τη χελώνα.

Το πρόβλημα βεβαίως υπάρχει, γιατί στην πραγματικότητα ξέρουμε ότι ο Αχιλλέας κάποτε θα φθάσει τη χελώνα. Ένας απλός τρόπος για την επίλυση αυτού του παράδοξου είναι να δεχθούμε ότι ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα , όταν αυτός θα έχει διανύσει απόσταση y μέτρων, όπου y είναι ο μικρότερος από τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς $x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, ...$. Βέβαια έτσι το πρόβλημα μεταφέρεται στην ύπαρξη του αριθμού y .

Από την προηγούμενη συζήτηση γίνεται φανερή η ανάγκη για τη θεώρηση κάποιου επιπρόσθετου αξιώματος που θα εξασφαλίζει μέσα στο $\mathbb{R}$ τα ακόλουθα:

(i) να είναι δυνατή η μέτρηση κάθε ευθύγραμμου τμήματος,

(ii) η εξίσωση $x^2 = a,\ a > 0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$ και

(iii) την ύπαρξη του αριθμού y .

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι το επιπλέον αξίωμα που απαιτείται, είναι το γνωστό ως ***αξίωμα της πληρότητας ή αξίωμα της συνέχειας.***

1. 5 Το αξίωμα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.

Έχουμε ήδη θεωρήσει το σύνολο $\mathbb{R}$ ως ένα ολικά διατεταγμένο σώμα, οπότε έχει νόημα να προχωρήσουμε στους επόμενους ορισμούς:

Ορισμός 1.5.1 (α) *Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι* ***φραγμένο πάνω****, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός K που είναι μεγαλύτερος ή ίσος προς κάθε στοιχείο του συνόλου S, δηλαδή, αν για κάποιο $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$x \leq \mathrm{K}, \text{ για κάθε } x \in S.$$

Ο αριθμός K λέμε ότι είναι ένα ***πάνω φράγμα*** *του συνόλου S.*

(β) *Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι* ***φραγμένο κάτω****, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός Λ που είναι μικρότερος ή ίσος προς κάθε στοιχείο του συνόλου S, δηλαδή, αν για κάποιο $\Lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$x \geq \Lambda, \text{ για κάθε } x \in S.$$

Ο αριθμός K λέμε ότι είναι ένα ***κάτω φράγμα*** *του συνόλου S.*

(γ) *Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι* ***φραγμένο****, αν είναι φραγμένο κάτω και φραγμένο πάνω.*

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Θεώρημα 1.5.1 *Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο, αν, και μόνον αν, υπάρχει $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|x| \leq \mathrm{M}$, για κάθε $x \in S$.*

Απόδειξη.

Από τη σχέση $|x| \leq \mathrm{M}$, για κάθε $x \in S$, έπεται ότι $-\mathrm{M} \leq x \leq \mathrm{M}$, για κάθε $x \in S$, οπότε το σύνολο S είναι φραγμένο πάνω και κάτω, δηλαδή είναι φραγμένο.

Αντίστροφα, αν το σύνολο S είναι φραγμένο, τότε υπάρχουν $\mathrm{K}, \Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\Lambda \leq x \leq \mathrm{K}$, για κάθε $x \in S$. Αν θέσουμε $\mathrm{M} = \min\{|\mathrm{K}|, |\Lambda|\}$, τότε ισχύει ότι $|x| \leq \mathrm{M}$, για κάθε $x \in S$.

Παράδειγμα 1. Το σύνολο $S = \{1,3,5,7,9\} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο πάνω και κάτω. Μερικά πάνω φράγματα του S είναι τα 9, 10, αλλά και κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 9. Ομοίως, κάθε πραγματικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του 1 είναι ένα κάτω φράγμα του συνόλου S.

Παράδειγμα 2. Το σύνολο $\mathrm{P} = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\}$ δεν είναι φραγμένο πάνω. Πράγματι, αν $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ είναι ένα πάνω φράγμα του P, τότε $\mathrm{K}+1 \in \mathrm{P}$ και

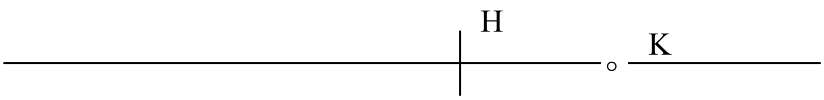
$\mathrm{K}+1>\mathrm{K}$, που είναι άτοπο. Όμως το σύνολο P είναι φραγμένο κάτω και ένα κάτω φράγμα του είναι ο αριθμός 0.

Με όσα είπαμε παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το αξίωμα της πληρότητας ή συνέχειας που έχουμε ήδη προαναγγείλει από την παράγραφο 2.4. Έχουμε σχετικά:

Αξίωμα της πληρότητας ή συνέχειας: *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι φραγμένο πάνω έχει ένα ελάχιστο πάνω φράγμα. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι φραγμένο κάτω έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα.*

Supremum και infimum συνόλου.

Από το αξίωμα της πληρότητας, αν S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι φραγμένο πάνω, τότε το S έχει ένα πάνω φράγμα H τέτοιο ώστε για κάθε άλλο πάνω φράγμα K του S να ισχύει: $\mathrm{H}\leq\mathrm{K}$.



Ο αριθμός $\mathrm{H}\in\mathbb{R}$ λέγεται **supremum** του συνόλου S και συμβολικά γράφουμε:

$$\mathrm{H}=\sup S \quad \text{ή} \quad \mathrm{H}=\sup_{x\in S} x.$$

Επίσης, αν S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι φραγμένο κάτω, τότε το S έχει ένα κάτω φράγμα h τέτοιο ώστε για κάθε άλλο κάτω φράγμα Λ του S να ισχύει: $\Lambda\leq\mathrm{h}$.

Ο αριθμός $h\in\mathbb{R}$ λέγεται **infimum** του συνόλου S και συμβολικά γράφουμε:

$$h=\inf S \quad \text{ή} \quad h=\inf_{x\in S} x.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ιδιαιτέρως, ότι το supremum και το infimum ενός συνόλου S δεν είναι ανάγκη να ανήκουν στο σύνολο S. Τι συμβαίνει όμως με τα υποσύνολα S του $\mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένα πάνω ή κάτω;

Για τα υποσύνολα αυτά δεχόμαστε αξιωματικά ότι:

$\sup S=+\infty$*, αν και μόνον αν, το σύνολο* S *δεν είναι φραγμένο πάνω.*

$\inf S=-\infty$*, αν και μόνον αν, το σύνολο* S *δεν είναι φραγμένο κάτω,* δηλαδή δεχόμαστε την ύπαρξη δύο στοιχείων που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε να μπορούμε να επεκτείνουμε το αξίωμα της πληρότητας ως εξής:

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ένα ελάχιστο πάνω φράγμα (supremum) και ένα μέγιστο κάτω φράγμα (infimum).

Το σύνολο που προκύπτει από την επισύναψη των στοιχείων $-\infty$ και $+\infty$ στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται ***επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών*** και συμβολίζεται με $\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης δεχόμαστε ότι στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι επιτρεπτές, όταν εμφανίζονται, οι ακόλουθες πράξεις:

$$\alpha+(+\infty)=+\infty \ \textit{και} \ \alpha+(-\infty)=-\infty, \ \textit{για κάθε} \ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\alpha(+\infty)=+\infty \ \textit{και} \ \alpha(-\infty)=-\infty, \ \textit{για κάθε} \ \alpha>0$$

$$\alpha(+\infty)=-\infty \ \textit{και} \ \alpha(-\infty)=+\infty, \ \textit{για κάθε} \ \alpha<0$$

$$\frac{\alpha}{+\infty}=0 \ \textit{και} \ \frac{\alpha}{-\infty}=0, \ \textit{για κάθε} \ \alpha\in\mathbb{R}.$$

2. Οι μιγαδικοί αριθμοί

Ιστορικά, η ανάγκη της επίλυσης εξισώσεων δευτέρου και τρίτου βαθμού απετέλεσε την αφετηρία της επέκτασης των πραγματικών αριθμών στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών, το οποίο περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού.

Ο Cardano το 1545 θεώρησε την εξίσωση $x^2+2x+2=0$ και έγραψε τις ρίζες της στη μορφή $-1\pm\sqrt{-1}$, σημειώνοντας ότι η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να λυθεί σε ένα σύνολο «μιγαδικών αριθμών» στο οποίο θα ισχύει η ισότητα $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$.

Ο Euler το 1777 εισήγαγε το συμβολισμό i και $-i$ για τις δύο διαφορετικές ρίζες του -1, τους αριθμούς της μορφής $a+bi$ και την έκφραση $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Έτσι ο Euler είχε θεωρήσει το σύνολο

$$\mathbb{C}=\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$$

το οποίο περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και μπορεί να πάρει τη δομή αλγεβρικού σώματος, αν του ορίσουμε τις πράξεις

$$+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}, (a+bi, c+di)\to(a+bi)+(c+di):=(a+c)+(b+d)i$$

$$\cdot:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}, (a+bi, c+di)\to(a+bi)\cdot(c+di):=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ο Wessel το 1797, ο Gauss το 1799 και ο Argand το 1806 θεώρησαν τους μιγαδικούς αριθμούς ως σημεία του επιπέδου δίνοντας τους έτσι γεωμετρική ερμηνεία.

Ο Hamilton το 1833 συνέλαβε την ιδέα της παράστασης των μιγαδικών αριθμών με διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Έτσι ουσιαστικά θεώρησε τον ισομορφισμό

$$\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2,\ a+bi\to\varphi(a+bi)=(a,b)$$

και μέσω αυτού όρισε τη δομή αλγεβρικού σώματος πάνω στο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Έτσι το $\mathbb{R}^2$ αποκτά τη δομή αλγεβρικού σώματος που περιέχει μια ισόμορφη εικόνα του $\mathbb{R}$ και επιπλέον με τη πράξη

$$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$$

ουσιαστικά θεώρησε το $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$.

2.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\},$$

των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με την αλγεβρική δομή σώματος, το οποίο αποτελεί επέκταση του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ μέσω των πράξεων

$$+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)\quad[\textbf{πρόσθεση}],$$

$$\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2):=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

[**πολλαπλασιασμός**].

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς

$$z=(x,y),\ z_1=(x_1,y_1),z=(x_2,y_2),\ z_3=(x_3,y_3).$$

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τον ορισμό των δύο πράξεων ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ εφοδιασμένο με τις δύο παραπάνω εσωτερικές πράξεις ικανοποιεί τις ιδιότητες:

A1. $z_1+z_2=z_2+z_1$, για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{R}^2$ **(αντιμεταθετική ιδιότητα),**

A2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, για κάθε $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}^2$ **(προσεταιριστική ιδιότητα),**

A3. υπάρχει στοιχείο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $(x,y)+(0,0)=(x,y)$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, **(ύπαρξη μηδενικού στοιχείου)**

A4. για κάθε $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, υπάρχει στοιχείο $-z=-(x,y)=(-x,-y)\in\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$**. (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου)**

A5. $z_1z_2=z_2z_1$, για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{R}^2$ **(αντιμεταθετική ιδιότητα),**

A6. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$, για κάθε $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}^2$ **(προσεταιριστική ιδιότητα),**

A7. υπάρχει στοιχείο $(1,0)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ τέτοιο ώστε: $(1,0)\cdot(x,y)=(x,y)$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, **(μονάδα πολλαπλασιασμού)**

A8. για κάθε $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ υπάρχει στοιχείο **(αντίστροφο του** z **)** $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ τέτοιο ώστε: $z\cdot z^{-1}=1$,

A9. $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$, για κάθε $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}^2$, **(επιμεριστική ιδιότητα).**

Η τριάδα $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις δύο εσωτερικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που ορίσαμε παραπάνω και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Επειδή ικανοποιούνται τα παραπάνω εννέα αξιώματα το σύνολο $\mathbb{R}^2$ αποκτά την αλγεβρική δομή του σώματος, είναι δηλαδή **το σώμα των μιγαδικών αριθμών**.

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών **περιέχει μια ισομορφική εικόνα του σώματος των πραγματικών αριθμών** μέσω της απεικόνισης

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\to\varphi(x):=(x,0).$$

Αυτό οφείλεται στο ότι η απεικόνιση φ είναι **ισομορφισμός σωμάτων**, δηλαδή είναι 1-1 και διατηρεί τις δύο πράξεις, αφού ισχύουν:

- $\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow(x,0)=(y,0)\Rightarrow x=y.$
- $\varphi(x+y)=(x+y,0)=(x,0)+(y,0)=\varphi(x)+\varphi(y)$
- $\varphi(xy)=(xy,0)=(x,0)(y,0)=\varphi(x)\varphi(y)$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ της ευθείας των πραγματικών αριθμών και του άξονα $x'x$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων του επιπέδου που ταυτίζεται με το σύνολο $\mathbb{R}^2$. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση

$$\varphi' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \to \varphi'(x) := (x, y_0),\ y_0 \neq 0,$$

δεν είναι ισομορφισμός σωμάτων, αφού δεν ικανοποιεί την τρίτη ιδιότητα που ικανοποιεί η απεικόνιση φ.

Έτσι έχουμε την ταύτιση $(x,0) = x$ και επιπλέον παρατηρούμε ότι το διατεταγμένο ζευγάρι $(0,1)$ έχει την ιδιότητα

$$(0,1)^2 := (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \equiv -1.$$

Το διατεταγμένο ζευγάρι $(0,1)$ ορίζεται ως **φανταστική μονάδα** και συμβολίζεται με το γράμμα i, δηλαδή είναι $i^2 = -1$, οπότε στο σώμα $\mathbb{C}$ έχει λύση η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (y,0)(0,1) \equiv x + yi .$$

Το διατεταγμένο ζευγάρι $(0,0) \equiv 0 + 0i \equiv 0$ είναι το **μηδενικό στοιχείο** του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη γραφή των μιγαδικών αριθμών έχουμε:

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \text{ και } \ y_1 = y_2, \qquad \textbf{(ισότητα)}$$

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i, \qquad \textbf{(πρόσθεση)}$$

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)i \qquad \textbf{(αφαίρεση)}$$

$$(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \ \textbf{(πολλαπλασιασμός)}$$

Για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$

$$i^{4n} = \left(i^4\right)^n = 1, \qquad i^{4n+1} = i^{4n}\cdot i = i,\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$i^{4n+2} = \left(i^4\right)^n \cdot i^2 = -1, \quad i^{4n+3} = i^{4n}\cdot i^3 = -i,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0,$ με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0,$ επιλύεται στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών και έχει τις λύσεις

$$x_1 = \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}.$$

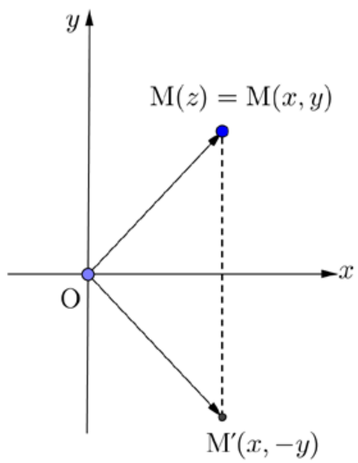
Για παράδειγμα έχουμε:

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm i\sqrt{|-4|}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm i.$$

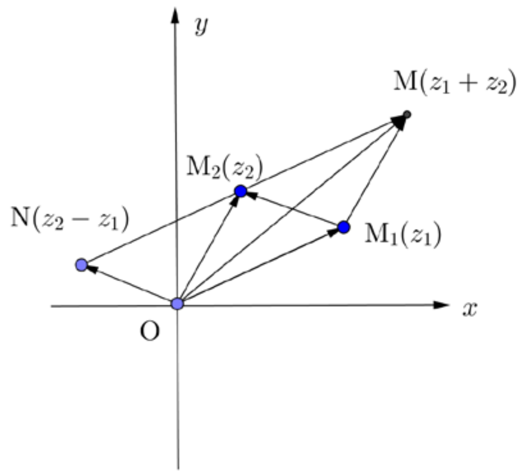
Οι μιγαδικοί αριθμοί αναπαρίστανται γεωμετρικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Π μέσω της απεικόνισης

$$f : \mathbb{C} \to \Pi, z = x + yi \to f(z) := \mathrm{M}(x, y).$$

Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού αριθμού στο Καρτεσιανό επίπεδο. Κάθε μιγαδικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο σημείο Μ του επιπέδου και συνεπώς στη διανυσματική ακτίνα **ΟΜ** του σημείου Μ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ αντιστοιχίζουμε τον **συζυγή** του $\overline{z} := x - yi$. Αν ο $\overline{z}$ αναπαρίσταται γεωμετρικά από το σημείο M', τότε τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x.

Σχετικά με τις πράξεις μιγαδικών αριθμών και το συζυγή ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ και $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ και $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, αν $z_2 \neq 0$.

Επίσης σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ αντιστοιχίζουμε το **μέτρο** του που είναι η απόσταση του σημείου Μ που τον αναπαριστά γεωμετρικά στο επίπεδο από την αρχή των αξόνων. Είναι δηλαδή

$$|z| := |\mathbf{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1}$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ και $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, αν $z_2 \neq 0$ και $z \neq 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**τριγωνική ανισότητα**),
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

Προσοχή!

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + (yi)^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 \neq |z|^2$$

Ισχύει ότι: $z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = x + 0i \in \mathbb{R}$

Αν $z = x + yi$, ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z, ενώ ο πραγματικός αριθμός y ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z.

Γράφουμε

$$x = \operatorname{Re} z \ \text{ και } \ y = \operatorname{Im} z\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z έχουμε τις ισότητες:

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \ \text{ και } \ y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,. \tag{2}$$

2.2. Η πολική ή τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi \neq 0 + 0i$ μπορούμε να τον γράφουμε στη τριγωνομετρική μορφή του

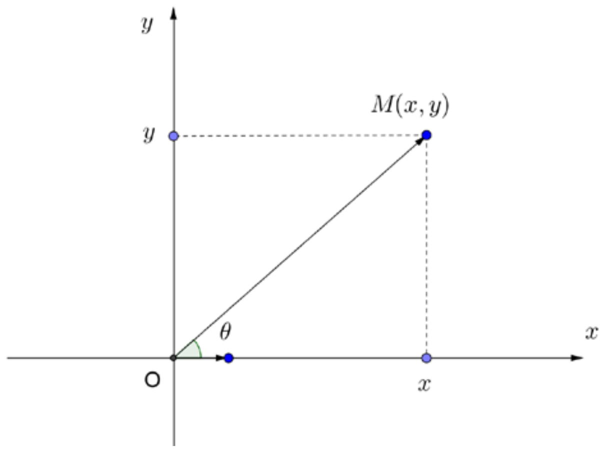
$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta},$$

όπου

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\left(\sin\theta\right)$$

και $r := \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ είναι το **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z.
Η γωνία θ προκύπτει από τις εξισώσεις

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \ \sin\theta = \frac{y}{r}. \qquad (3)$$



Σχήμα 3

Αν θ είναι μία λύση των εξισώσεων (3), τότε και όλες οι γωνίες της μορφής $\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης λύσεις. Κάθε λύση θ των εξισώσεων (3) λέγεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $\arg z$, ενώ, αν $\theta \in [0, 2\pi)$, τότε η γωνία θ λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Arg} z$. Για το μιγαδικό αριθμό 0 δεν ορίζεται όρισμα.

Για παράδειγμα, ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$ έχει μέτρο $|z| = \sqrt{2}$, οπότε για την εύρεση του ορίσματος αυτού έχουμε τις εξισώσεις

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του $z = 1 + i$ είναι $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Ομοίως, ο μιγαδικός αριθμός $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει μέτρο 1 και όρισμα θ με

$$\cos\theta=-\frac{1}{2} \text{ και } \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z},$$

οπότε έχει τριγωνομετρική μορφή

$$z=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός $z=x>0$ έχει όρισμα $\theta=0$, οπότε γράφεται ως $z=x(\cos 0+i\sin 0)$, ενώ ο αριθμός $z=x<0$ έχει όρισμα $\theta=\pi$ και γράφεται ως $z=|x|(\cos\pi+i\sin\pi)=|x|e^{\pi i}$. Για τον μιγαδικό αριθμό $z=yi$ έχουμε

$$\arg(yi)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \alpha\nu\ \ y>0,\\ \frac{3\pi}{2}, & \alpha\nu\ \ y<0,\end{cases}$$

οπότε

$$z=yi=\begin{cases} y\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=ye^{\frac{\pi i}{2}}, & \text{αν } \ y>0\\ |y|\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=|y|e^{\frac{3\pi i}{2}}, & \text{αν } \ y<0\end{cases}.$$

Αν είναι

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}, z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},\ \ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$,

μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν::

α. $z_1=r_1e^{i\theta_1}=z_2=r_2e^{i\theta_2} \Leftrightarrow r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
$\Leftrightarrow r_1=r_2$ και $\theta_1-\theta_2=2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}.$

β. $z_1\cdot z_2=\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$,

γ. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$,

δ. $\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]$,

ε. $z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta), n\in\mathbb{N}.$ **(τύπος του De Moivre).**

Οι παραπάνω ιδιότητες διευκολύνουν πολύ τους υπολογισμούς με μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, για τον μιγαδικό αριθμό $z = 1 + i$ που έχει πολική μορφή $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, έχουμε

$$z^{2016} = \left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos\frac{2016\pi}{4} + i\sin\frac{2016\pi}{4}\right) = 2^{1008}\left(\cos 504\pi + i\sin 504\pi\right)$$

$$= 2^{1008}\left(\cos 252\cdot 2\pi + i\sin 252\cdot 2\pi\right) = 2^{1008}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 2^{1008},$$

$$z^{2017} = \left(\sqrt{2}\right)^{2017}\left(\cos\frac{2017\pi}{4} + i\sin\frac{2017\pi}{4}\right) = 2^{1008}\sqrt{2}\left(\cos\left(504\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(504\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{1008}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1008}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{1008}\left(1+i\right),$$

Έτσι σχετικά με το όρισμα προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες, οι οποίες ισχύουν πάντοτε modulo 2π, αφού το όρισμα μιγαδικού αριθμού, σύμφωνα με όσα είπαμε, δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Για $z_1, z_2 \neq 0$, έχουμε

- $\arg\left(z_1\cdot z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right) \left(\bmod 2\pi\right)$,
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right) \left(\bmod 2\pi\right)$,
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \left(\bmod 2\pi\right),\ z \neq 0$,
- $\arg\left(z^n\right) = n\arg z \left(\bmod 2\pi\right),\ z \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Η **απόσταση** μεταξύ δύο σημείων $\mathrm{M}_1\left(z_1\right), \mathrm{M}_2\left(z_2\right)$ του επιπέδου δίνεται από τη σχέση

$$d\left(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2\right) = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \left|z_1 - z_2\right|.$$

Η **εξίσωση του κύκλου** $C\left(M_0\left(z_0\right), \alpha\right), \alpha > 0$ είναι:

$$\left|z - z_0\right| = \alpha .$$

Πράγματι, $\left|z - z_0\right| = \alpha \Leftrightarrow \left|z - z_0\right|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = \alpha^2$.

Όμοια προκύπτει ότι η **εξίσωση της έλλειψης** με εστίες στα σημεία $M_0\left(z_0\right) = M_0\left(\gamma, 0\right)$ και $M_0'\left(-z_0\right) = M_0'\left(-\gamma, 0\right)$ είναι η $\left|z - z_0\right| + \left|z + z_0\right| = 2\alpha$.

Σχετικά με **ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα** του μιγαδικού επιπέδου, έχουμε τα θεωρήματα που ακολουθούν:

Θεώρημα 2.2.1: Αν $\mathrm{A}(a),\mathrm{B}(b)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε με (A,B) συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α και Β, που είναι διαφορετικά από τα δύο άκρα (ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα). Αν $\mathrm{M}(z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. $\mathrm{M}(z)\in(\mathrm{A}(a),\mathrm{B}(b))$.

2. **Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε:**

$$z-a=\lambda(b-z) \text{ ή } \frac{z-a}{b-z}=\lambda>0.$$

3. **Υπάρχει $t\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $z=(1-t)a+tb$.**

4. $\arg(z-a)=\arg(b-z)(\mathrm{mod}\,2\pi)$

Απόδειξη. $1\Leftrightarrow 2$.

$$\mathrm{M}(z)\in(\mathrm{A}(a),\mathrm{B}(b))\Leftrightarrow|a-z|+|z-b|=|a-b|\Leftrightarrow z-a=\lambda(b-z),\lambda>0$$

$2\Leftrightarrow 3$

Αν θέσουμε $t=\dfrac{\lambda}{\lambda+1},\lambda>0$, τότε $t\in(0,1)$ και $\lambda=\dfrac{t}{1-t}>0$, οπότε έχουμε:

$$z-a=\lambda(b-z)\Leftrightarrow z=\frac{1}{1+\lambda}a+\frac{\lambda}{1+\lambda}b\Leftrightarrow z=(1-t)a+tb.$$

$3\Leftrightarrow 4$

$$\arg(z-a)=\arg(b-z)(\mathrm{mod}\,2\pi)\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z-a}{b-z}\right)=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$$

$$\Leftrightarrow z-a=\lambda(b-z),\lambda>0.$$

Σημείωση

Όταν γράφουμε [Α,Β] εννοούμε ότι συμπεριλαμβάνουμε και τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ με το σύμβολο (ΑΒ συμβολίζουμε τα σημεία της ημιευθείας με αρχή Α που περιέχει το σημείο, χωρίς να συμπεριλαμβάνεται το Α. Έτσι για το σύνολο (ΑΒ έχουμε:

$$\mathrm{M}(z) \in (\mathrm{AB} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \lambda > 0 \Leftrightarrow \arg(z-a) = \arg(b-a)(\bmod 2\pi).$$

Με το σύμβολο AB συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία A και B. Τότε ισχύει:

Θεώρημα 2.2.2: Αν $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. $\mathrm{M}(z) \in \mathrm{AB}$

2. $\dfrac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

3. Υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $z = (1-t)a + tb$.

4. $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$.

5. $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Απόδειξη.
Η απόδειξη της ισοδυναμίας των προτάσεων 1,2 και 3 είναι όπως στο θεώρημα 1. Για τις υπόλοιπες προτάσεις έχουμε:

$$\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0 \text{ και}$$

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} & 0 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0.$$

2.3 Οι νιοστές ρίζες μιγαδικών αριθμών

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών κάθε πολυωνυμική εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές, άρα και πραγματικούς, έχει μία τουλάχιστον λύση. Αποδεικνύεται ότι μία πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει ακριβώς ν ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Η διαδικασία εύρεσης αυτών των ριζών βασίζεται στην δυνατότητα παραγοντοποίησης του πολυωνύμου. Ιδιαίτερη περίπτωση αποτελεί η εύρεση των *ν*ιοστών ριζών μιγαδικού αριθμού, δηλαδή η εύρεση των ριζών της εξίσωσης

$$z^{\nu} = a,\ a \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}.$$

Ειδικότερα, για $a = 1$, οι ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$ αποτελούν τις *ν*ιοστές ρίζες της μονάδας και ισχύει ότι:

Θεώρημα: Η εξίσωση $z^{\nu} = 1$, όπου *ν* θετικός ακέραιος, έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ *ν* ακριβώς διαφορετικές λύσεις, που δίνονται από τον τύπο

$$z_{\kappa} = \cos\frac{2\kappa\pi}{\nu} + \imath\sin\frac{2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1.$$

Απόδειξη

Αν $z = re^{i\theta}$ έχουμε

$$z^{\nu} = 1 \Leftrightarrow r^{\nu}e^{\nu\theta i} = 1e^{0i} \Leftrightarrow r^{\nu} = 1 \text{ και } \nu\theta = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ και } \theta = \frac{2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2\kappa\pi i}{\nu}} = \cos\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Θα αποδείξουμε ότι από τις παραπάνω άπειρες τιμές του z που βρήκαμε ακριβώς ν είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αυτές που προκύπτουν για $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$.

Έχουμε βρει μέχρι τώρα για την εξίσωση τις λύσεις

$$z_{\kappa} = \cos\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\cos\frac{2\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\kappa} = \omega^{\kappa},\ \kappa \in \mathbb{Z},$$

όπου θέσαμε $\omega = \cos\frac{2\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\pi}{\nu}$.

Επειδή $\kappa = \rho\nu + \upsilon,\ \upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, έπεται ότι

$$\omega^{\kappa} = \omega^{\rho\nu+\upsilon} = \left(\omega^{\nu}\right)^{\rho}\omega^{\upsilon} = \omega^{\upsilon},\ \upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\},$$

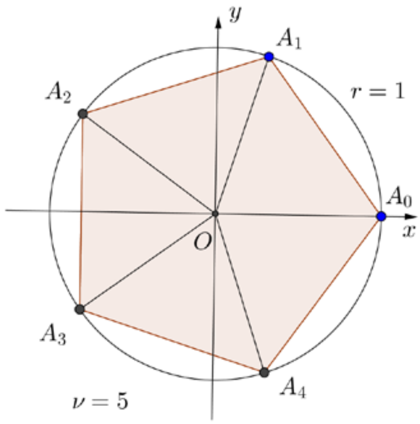
οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι οι λύσεις $\omega^0 = 1,\ \omega,\ \omega^2,\ldots,\omega^{\nu-1}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πράγματι, αν υπήρχαν $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$ με $0 \le \kappa_1 < \kappa_2 \le \nu - 1$ τέτοια ώστε $\omega^{\kappa_1} = \omega^{\kappa_2}$, τότε θα είχαμε

$$\cos\frac{2\kappa_1\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa_1\pi}{\nu} = \cos\frac{2\kappa_2\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa_2\pi}{\nu} \Leftrightarrow \frac{2\kappa_1\pi}{\nu} - \frac{2\kappa_2\pi}{\nu} = 2\lambda\pi,\ \lambda \in \mathbb{Z}$$

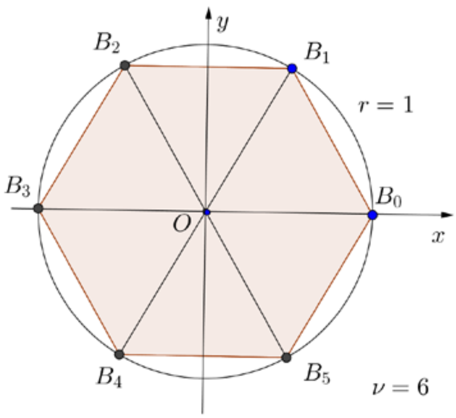
$$\Leftrightarrow \frac{\kappa_1}{\nu} - \frac{\kappa_2}{\nu} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa_1 - \kappa_2 = \lambda\nu, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = 0, \text{ αφού } 0 \le \kappa_1 < \kappa_2 \le \nu - 1,$$

$$\Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2, \text{ άτοπο.}$$

Τα σημεία που αναπαριστούν γεωμετρικά τις λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$ αποτελούν τις κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι περιπτώσεις για $\nu = 5$ και $\nu = 6$.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Σχετικά με την εξίσωση $z^\nu = a, a \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ θεωρούμε τη τριγωνομετρική μορφή του a, έστω $a = |a| e^{i\theta}$. Αν $z = re^{i\theta}$, τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$z^\nu = a \Leftrightarrow z^\nu = w^\nu, \text{ όπου } w = \sqrt[\nu]{|a|}\, e^{\frac{i\theta}{\nu}} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^\nu = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{w} = \cos\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{\nu} = e^{\frac{2\kappa\pi i}{\nu}}, \kappa = 0,1,\ldots,\nu-1$$

$$\Leftrightarrow z = we^{\frac{2\kappa\pi i}{\nu}} = \sqrt[\nu]{|a|}\, e^{\frac{i\theta}{\nu}} e^{\frac{2\kappa\pi i}{\nu}} = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\sin\frac{2\kappa\pi\theta}{\nu}\right), \kappa = 0,1,\ldots,\nu-1.$$

Γεωμετρικά η αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης $z^\nu = a, a \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ ορίζει τις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με ν κορυφές, με τη διαφορά ότι αυτό είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας ίση με $\sqrt[\nu]{|a|}$.