ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
12/9/2018

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $a_n \geq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Αν $m \in \mathbb{N}$ βρείτε το $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{m}}$.

(0,5 μον.)

(β) Έστω $0 < a < 1$. Βρείτε τα όρια (i) $\lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ (1 μον.)

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k$. (1 μον.)

ΘΕΜΑ 2. (α) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν x ρητός και $f(x) = x^2$ αν x άρρητος. (1 μον.)

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα με την ιδιότητα $f(0) = 0$ και $|f(x)| \geq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί. (1,5 μον.)

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (ξ_n) με $\xi_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$ και $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = f'(x_0)$. (Υπόδειξη: ΘΜΤ στο $[x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$). (1 μον.)

(β) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor (τάξης 1 με κέντρο το 0), δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) \right|$$

συγκλίνει. (1,5 μον.)

ΘΕΜΑ 4. (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Μέσης Τιμής για ολοκληρώματα βρείτε το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x+n}\, dx.$$

(1 μον.)

(β) Χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann για το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο $[0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{16n}{k^2 + 2kn + 5n^2} = 2\pi - 8\arctan(1/2).$$

(1,5 μον.)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2 ώρες και 45΄.