ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ III
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

ΘΕΜΑ 1. (i) (1 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A e^{-(x-1)^2}dxdy$, όπου

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(ii) (1,5 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A xy dxdy$, όπου

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| \leq \sqrt{3}y\}.$$

ΘΕΜΑ 2. (i) (1,3 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_A (x^2 - y^2)^5 x^6 y^6 (x^2 + y^2) dxdy,$$

όπου

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2,\ 3/2 \leq xy \leq 2\}.$$

(ii) (1,2 μ.) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ''μέσα'' στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2x$ και ''κάτω'' από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ΘΕΜΑ 3. (i) (1,3 μ). Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{y + (x^2 + 3y^2)y}{x^2 + 3y^2}\,dx - \frac{x}{x^2 + 3y^2}\,dy$$

όπου C η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.

(ii) (1,2 μ). Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{F}(x,y) = (3x^2y + y^3 + 4,\ x^3 + 3xy^2 + 2)$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$ πάνω στην καμπύλη C του $\mathbb{R}^2$ με παραμετρικές εξισώσεις $x = e^{t^2}$, $y = e^t$ για $0 \leq t \leq 1$.

ΘΕΜΑ 4. (2,5 μ). Επαληθεύστε το θεώρημα της απόκλισης (Gauss) για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, και το στερεό $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \text{και } z \leq 0\}$.