ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2017

ΘΕΜΑ 1. (i) (1 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A \frac{x}{1+y^5}dxdy$, όπου

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 2\}.$$

~~(ii)~~ (1,5 μ.) Να μετασχηματίσετε το επάλληλο ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy \right) dx$$

σε διπλό και κατόπιν να το υπολογίσετε.

ΘΕΜΑ 2. (i) (1,3 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_A (y-x^2)(y+2x^2)dxdy,$$

όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x^2, \quad y = x^2 + 1.$$

~~(ii)~~ (1,2 μ.) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 0, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

ΘΕΜΑ 3. (i) (1,2 μ). Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (e^{x^3} - y^3)\, dx + (e^{y^3} + x^3)\, dy$$

όπου C η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.

(ii) (1,3 μ). Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (y, xz, yz)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$ πάνω στην καμπύλη C του $\mathbb{R}^3$ με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2$, $y = \ln(t)$, $z = t$ για $1 \le t \le 2$.

ΘΕΜΑ 4. (i) (1,2 μ). Θεωρούμε την επιφάνεια με διανυσματική εξίσωση $\vec{r}(u,v) = (u, v, 2-u-v)$ με $u \ge 0$, $v \ge 0$. Αν S είναι το τμήμα της επιφάνειας που περιέχεται στο 1ο ογδοημόριο του $\mathbb{R}^3$, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S (2x+y)\, d\sigma$.

(ii) (1,3 μ). Έστω $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{x}{2}, y, z)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Αν S είναι το τμήμα της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$ για το οποίο $z \le 9$, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ όπου $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S.