

2

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 30 Σεπτεμβρίου 2016  
Ομάδα Α

Απαντήστε και στα τρία θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες.

**ΘΕΜΑ 1ο**

A) Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : x - 9 = 2 - 2y = 10 - 2z$  και  $\epsilon_2 : -7x - 49 = 6y - 36 = 42z$ .

(α) Να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις των δύο ευθειών και να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές είναι ασύμβατες. (Μονάδες 1)

(β) Να βρείτε τα ίχνη της κοινής κάθετης των δύο ευθειών. (Μονάδες 1)

(B) Θεωρούμε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$  και  $S_2 : x + z - 4 = 0$

(α) Να αναγνωρίσετε τις δύο αυτές επιφάνειες και να περιγράψετε τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία. (Μονάδες 0.5)

(β) Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης που είναι τομή των δύο επιφανειών  $S_1$  και  $S_2$ . (Μονάδες 1)

**ΘΕΜΑ 2ο**

(A) Να λυθεί με την μέθοδο απαλοιφής Gauss το σύστημα

$$\begin{aligned}x - 3y &= 4 \\ -3x + 8y - z &= -10 \\ 2x - 7y - z &= a\end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 1.5)

(B) Έστω  $V = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$  και  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0, y = 0\}$  υπόχωροι του  $\mathbb{R}^3$ . Να βρεθεί μία βάση για κάθε έναν από τους υποχώρους  $V$ ,  $U$  και  $V + U$ . Ισχύει ότι  $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$ ; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 1.5)

**ΘΕΜΑ 3ο**

A) Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  γραμμική απεικόνιση με τύπο  $f(x, y, z) = (x + y - 2z, -2x + y + z, -x + 2y - z)$ .

(α) Να βρεθεί ο πίνακας της  $f$  ως προς την κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ . (Μονάδες 0.5)

(β) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα  $\text{Ker } f$  και της εικόνας  $\text{Im } f$ . (Μονάδες 1.5)

B) Έστω  $V, U$  διανυσματικοί χώροι και  $\phi : V \rightarrow U$  γραμμική απεικόνιση.

α) Ναδειχθεί ότι η εικόνα  $\text{Im } \phi$  είναι υπόχωρος του  $U$ . (Μονάδες 0.5)

β) Ναδειχθεί ότι η  $\phi$  είναι ένα - προς - ένα αν και μόνον αν  $\text{Ker } \phi = \{0_V\}$ . (Μονάδες 0.5)

γ) Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι ένα - προς - ένα. Να ευρεθεί η διάσταση της εικόνας  $\text{Im } g$ . Είναι η  $g$  επί; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 0.5)

Καλή επιτυχία!