

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

I. Κολέτσος

Τρίτο Εξάμηνο

Κανονική Εξέταση 2016-17

Ονοματεπώνυμο με κεφαλαία γράμματα:

A.M.:

Θέμα 1 (3 Βαθμοί) α) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Να κατασκευάσετε τις εξισώσεις της μεθόδου Jacobi, για το σύστημα $Ax=b$, $b=[11, 12, 11]^T$ με αρχικό διάνυσμα $x^0 = [0, 0, 0]^T$. Συγκλίνει η παραπάνω διαδικασία;

β) Για τη γενική επαναληπτική διαδικασία $x^k = Bx^{k-1} + d$, (x^0 γνωστό, \bar{x} λύση του συστήματος) να αποδείξετε τον τύπο σφάλματος:

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \|B\|^k \|x^0 - \bar{x}\|$$

γ) Για το σύστημα του ερωτήματος (α), να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάζονται για να εξασφαλίσετε ότι το σφάλμα (σε κατάλληλη νόρμα) είναι μικρότερο από 10^{-5} . Δίνεται, ότι $\bar{x} = [1, 1, 1]^T$.

δ) Αν για το πρόβλημα το ερωτήματος (α) εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel, θα έχουμε σύγκλιση στην πραγματική λύση του συστήματος;

ε) Να κατασκευάσετε τις εξισώσεις της μεθόδου Gauss-Seidel για το σύστημα $Ax=b$.

Θέμα 2 (2 Βαθμοί) Δίνονται τα σημεία $(x_1, f_1) = (0, 1)$, $(x_2, f_2) = (2, 9)$, $(x_3, f_3) = (3, 10)$, $(x_4, f_4) = (3, 12)$, $(x_5, f_5) = (6, 18)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια εκτίμηση της f . Επιλέξτε μεταξύ της πολυωνυμικής παρεμβολής για τη κατασκευή ενός πολυωνύμου έως 4^{th} βαθμού που παρεμβάλλει τις 5 τιμές της f και μεταξύ της μεθόδου των ελαχιστών τετραγώνων για την κατασκευή μιας ευθείας που προσεγγίζει κατά τον καλύτερο τρόπο τα 5 σημεία. Αν επιλέξετε παρεμβολή, να κατασκευάσετε το πολυώνυμο είτε στη μορφή Lagrange, είτε στη μορφή Newton χωρίς να χρειάζεται να κάνετε τις τελικές πράξεις. Αν επιλέξετε τα ελάχιστα τετράγωνα να αποδείξετε τις κανονικές εξισώσεις και να λύσετε το 2×2 σύστημα που προκύπτει για να βρείτε τους συντελεστές της Regression Line.

Θέμα 3 (3 Βαθμοί) Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$. (1)

α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση ρ στο διάστημα $[0, 1]$.

β) Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της γενικής επαναληπτικής μεθόδου $x_{k+1} = g(x_k) = \frac{5x_k^3 + 3}{20}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ στη λύση ρ της (1) για κάθε $x_0 \in [0, 1]$.

γ) Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου με αρχικό $x_0 = 0.2$, για την προσέγγιση της λύσης ρ της (1).

δ) Πόσες επιπλέον επαναλήψεις πρέπει να γίνουν ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-6} .

Δίνεται η εκτίμηση σφάλματος $|x_\kappa - \bar{x}| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$, αν $|g'(x)| \leq L$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

ε) Έστω $\varepsilon_k = x_k - \rho$, να δειχθεί ότι $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{3\rho^2}{4}$, όταν $\kappa \rightarrow +\infty$.

Θέμα 4 (2 Βαθμοί)

α) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 4x^3 - x^4$. Να υπολογισθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange σε μορφή Newton της συνάρτησης f στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

β) Να προσθέσετε το σημείο $x_4 = 3$ και να υπολογίσετε εκ νέου το πολυώνυμο παρεμβολής με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες.

Καλή επιτυχία.