ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»
18 Σεπτεμβρίου 2014

B

ΘΕΜΑ 1° Δίνονται τα επίπεδα

$\Pi_1 : x-2y-z-18=0,\ \ \Pi_2 : 2x-y-z=0$ και τα σημεία $K(1,-1,2),\ \Lambda(3,5,0)$.

(α) Βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας $\varepsilon = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

(β) Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του μεσοκάθετου επιπέδου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ

(γ) Να προσδιορίσετε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ε τέτοιο ώστε $MK = M\Lambda$.

ΘΕΜΑ 2° **(α)** Να διερευνήσετε και να λύσετε το γραμμικό σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} x-3y+\gamma z=-4 \\ 2x-y+(\gamma+3)z=-3 \\ 3x-4y+(\gamma+1)z=\delta-8 \end{cases}$$
για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\gamma,\delta \in \mathbb{R}$. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Στις περιπτώσεις όπου το (Σ) είναι συμβιβαστό, έστω Λ το σύνολο λύσεων του (Σ), έστω Λ_0 το σύνολο λύσεων του αντιστοίχου ομογενούς γραμμικού συστήματος (Σ_0) και έστω $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ μία συγκεκριμένη λύση του (Σ). Εφαρμόστε τον τύπο $\Lambda = \Lambda_0 + \{\vec{\xi}\}$ για να βρείτε το σύνολο λύσεων Λ_0 του (Σ_0) στις περιπτώσεις όπου το (Σ) είναι συμβιβαστό, χωρίς να λύσετε το (Σ_0).

ΘΕΜΑ 3° **Α)** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Δείξτε ότι ο Α ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση: $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.

(ii) Δείξτε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

Β) **(i)** Έστω V γραμμικός χώρος διάστασης n. Έστω στοιχεία $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \in V$ γραμμικώς ανεξάρτητα και έστω $\mathbf{u} \in V$. Δείξτε ότι αν τα στοιχεία $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r]$.

(ii) Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$: $V_1 = [(2,-1,4),(0,3,1),(4,1,9)]$. Βρείτε υπόχωρο V_2 του $\mathbb{R}^3$ τέτοιον ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

ΘΕΜΑ 4° Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, η οποία δίνεται από τον τύπο:
$$f(x,y,z) = (x-2y-3z,\ y+2z,\ x-y-z).$$

(α) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Βρείτε τον πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ της f, μία βάση του και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

(γ) Βρείτε την εικόνα $\operatorname{Im} f$ της f, μία βάση της και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 45 λεπτά

Καλή επιτυχία!