ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 01 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017, ΩΡΑ 18.00 - 21.00

Θέμα (Θ-1) (Ανίσωση Gronwall). Έστω $\phi(t)$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, T]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $k > 0$ και μια άλλη συνεχής συνάρτηση $f(t)$ στο $[0, T]$, έτσι ώστε $\phi(t) \leq f(t) + k\int_0^t \phi(u)du$, για κάθε $t \in [0, T]$. Τότε, για κάθε $t \in [0, T]$, ισχύει $\phi(t) \leq f(t) + k\int_0^t f(\tau)\exp[k(t-\tau)]d\tau$.

Θέμα (Θ-2) (Θεώρημα Αστάθειας) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $\dot{V}(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά της αρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x, για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, είναι ασταθής.

Θέμα (Θ-3) Έστω το δυναμικό σύστημα $x' = f(x)$, όπου $f : D \mapsto \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $D \subset \mathbb{R}$ με $0 \in D$ και $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $0 \in D$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν $|f'(0)| < 1$.

***** Να γραφούν τα ΔΥΟ (2) από τα θέματα (Θ-1)-(Θ-3) *****

Θέμα (Π-1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις για τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί αν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το μονοσήμαντο των λύσεων των αντιστοίχων προβλημάτων αρχικών τιμών.

$$(i)\ y'(x) = [x - \sin(y(x))]^{\frac{4}{5}},\quad y(0) = 0 \text{ και } (ii)\ y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{\frac{4}{5}},\quad y(0) = 0.$$

Θέμα (Π-2) (i) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος $x' = x + 3y + 2$, $y' = x - y - 2$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος της ευστάθειας αυτών και να σχεδιαστεί ποιοτικά το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων. (ii) Έστω το σύστημα $x' = x - 2xy$, $y' = -y + 4xy$. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών.

Θέμα (Π-3) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $x' = x^2 + (\lambda - 1)x - \frac{1}{4}(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$.

Θέμα (Π-4) Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}_1 = x_2 + 2\mu x_1(5 - x_1^2 - x_2^2)$, $\dot{x}_2 = -x_1 + 2\mu x_2(5 - x_1^2 - x_2^2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, όπου $\mu > 0$ σταθερά. Κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων να προσδιορίσετε το σύνολο $\omega(x_0)$ για οποιοδήποτε διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Θέμα (Π-5) Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(2 - 5x_1^2 - 3x_2^2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. (i) Κάνοντας χρήση της συνάρτησης $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$, να δείξετε ότι για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών είναι φραγμένη. (ii) Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Poincare-Bendixson, να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει τουλάχιστον μία περιοδική λύση.

Θέμα (Π-6) Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2$, $\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές με $c > a$. Να δώσετε μία περιοχή $D \subset \mathbb{R}^2$ εντός της οποίας δεν μπορεί να υπάρχει περιοδική λύση του συστήματος αυτού (αιτιολογείστε κατάλληλα με χρήση του κριτηρίου Bendixson).

***** Να γραφούν ΤΡΙΑ (4) από τα θέματα (Π-1)-(Π-6) *****

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3:00 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!