

Θέμα. Ένα διάσημο σύστημα εξισώσεων είναι οι εξισώσεις Belousov-Zhabotinskii που έχουν 0.3 χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση της δυναμικής εξέλιξης ενός πλήθους βιολογικών συστημάτων. Το σύστημα αυτό γράφεται:

$$\frac{dX}{dt} = c_1 + c_2 Z - X - XY^2$$

$$c_3 \frac{dY}{dt} = X + XY^2 - Y$$

$$c_4 \frac{dZ}{dt} = Y - Z$$

(A (6M)) (i) Δημιουργήστε ένα πρόγραμμα το οποίο θα ολοκληρώνει αριθμητικά στο χρόνο τις παραπάνω εξισώσεις με την μέθοδο Euler για τιμές παραμέτρων $c_1=2$, $c_2=0.15$, $c_3=0.01$ και $c_4=0.02$. Χρησιμοποιήστε $dt = 0.001$. Ο τελικός χρόνος ολοκλήρωσης είναι $tend=2$. (3.0/10)

(ii) Το πρόγραμμα θα δημιουργεί ένα αρχείο αποτελεσμάτων το οποίο θα το ονομάσετε `results1.txt` και θα καταγράφεται ο χρόνος t η τιμή των μεταβλητών X, Y, Z καθώς και των παραγώγων τους ανά 5 dt. (1/10)

(ii) Για αρχικές συνθήκες $X=0.3$, $Y=0.1$, $Z=0.7$, πλοτάρτε τα διάγραμμα (time, X) και το διάγραμμα φάσης (X, Y). Τι παρατηρείτε; Χαρακτηρίστε την δυναμική του συστήματος. Ονομάστε τα αρχεία `diagram1.pdf` και `diagram2.pdf`. Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο NOTES. (2/10)

(B (4M)) Μετά από αδιαστατοποίηση και παραδοχές, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αναχθούν στην εξής εξίσωση

$$\frac{du}{dt} = 2u(1-u) + 0.02 \exp(u)$$

(i) Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα προσδιορίζει αριθμητικά με την μέθοδο Newton-Raphson σημεία ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης με ακρίβεια $1.E-06$ και να προσδιορίζει την ευστάθεια τους. Το πρόγραμμα θα δημιουργεί ένα αρχείο το οποίο θα φαίνονται τα αποτελέσματα σύγκλισης της μεθόδου Newton. Πιο συγκεκριμένα στο αρχείο θα αναγράφονται στην ίδια γραμμή τουλάχιστον: ο τρέχων αριθμός επανάληψης της μεθόδου, το σφάλμα σύγκλισης και η τρέχουσα τιμή της προσεγγιστικής λύσης καθώς και ότι άλλο στοιχείο χρειάζεστε για την έρευνα της ευστάθειας (2.0/10)

(ii) Πόσα σημεία ισορροπίας βρίσκετε και ποια είναι αυτά; ποια είναι η ευστάθεια τους? Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο NOTES. Οι αρχικές σας εκτιμήσεις να είναι στο διάστημα $[-1.5, 1.5]$. (2.0/10)

(Σημείωση: Επειδή η παραπάνω εξίσωση είναι αδιαστατοποιημένη είναι δυνατό να υπάρχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές λύσεις).